

2.3 Experimentelle Bestimmung der Fermi-Fläche

Grundlage (wie beim QHE):

Quantisierung der Elektronenbahnen \rightarrow **Landau-Niveaus**

$$E = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.17)$$

mit $\vec{B} = (0, 0, B)$ und der Zyklotronfrequenz $\omega_c \equiv eB/m^*$.

semiklassischer Ansatz von Onsager und Lifshitz:

Annahme: Elektronenbahnen sind im Magnetfeld gemäß der Bohr-Sommerfeld-Beziehung quantisiert (Quantisierung des Bahndrehimpulses):

$$\oint \vec{p} \cdot d\vec{r} = (n + \gamma)2\pi\hbar \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

(γ ist eine Phasenkorrektur; $\gamma = 1/2$ für freie Elektronen)

Mit der Definition des Impulses \vec{p} eines Teilchens (Ladung q) im Magnetfeld $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$$\vec{p} = \vec{p}_{kin} + \vec{p}_{feld} = \hbar\vec{k} + q\vec{A} \quad (2.19)$$

(\vec{A} : Vektorpotential) gilt dann

$$\oint \vec{p} \cdot d\vec{r} = \oint \hbar\vec{k} \cdot d\vec{r} + q \oint \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (2.20)$$

- Auswertung des Terms $\oint \hbar\vec{k} \cdot d\vec{r}$:

Bewegungsgleichung eines Teilchens mit Ladung q im Magnetfeld:

$$\hbar \frac{d\vec{k}}{dt} = q \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B} \quad (2.21)$$

Integriert über die Zeit ergibt

$$\hbar\vec{k} = q\vec{r} \times \vec{B} \quad (2.22)$$

bis auf additive Konstante, die hier unwichtig ist.

Damit gilt

$$\oint \hbar\vec{k} \cdot d\vec{r} = \oint q(\vec{r} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = -q\vec{B} \underbrace{\oint \vec{r} \times d\vec{r}}_{\text{Vektor}} = -2q\Phi \quad (2.23)$$

Vektor $\|\vec{B}$
mit Länge =
2 \times (von der Bahn
eingeschlossene Fläche
A)

Hierbei ist $\Phi = B \cdot A$ der magnetische Fluss, den die Bahn im Ortsraum einschließt.

- Auswertung des Terms $q \oint \vec{A} \cdot d\vec{r}$:

$$q \oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = q \int \nabla \times \vec{A} \cdot \vec{\sigma} = q \int \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = q\Phi \quad . \quad (2.24)$$

\uparrow Satz von Stokes
 mit Flächenelement $d\vec{\sigma}$

In (2.18) eingesetzt liefert

$$\oint \vec{p} \cdot d\vec{r} = -q\Phi = (n + \gamma)2\pi\hbar \quad . \quad (2.25)$$

D.h., aus der Bohr-Sommerfeld Quantisierung des Bahndrehimpulses folgt die Quantisierung des magnetischen Flusses Φ_n durch Bahn des Elektrons (Ladung $q = -e$) im Quantenzustand n

$$\Phi_n = (n + \gamma) \frac{h}{e} \quad (2.26)$$

mit $h/e = 4.14 \cdot 10^{-15}$ Vs.

Fläche S_n der Bahn im \vec{k} -Raum:

(wichtig für Betrachtung des de Haas-van Alphen-Effekts)

Aus (2.21), der Bewegungsgleichung eines Elektrons der Ladung e im Magnetfeld

$$\hbar \frac{d\vec{k}}{dt} = -e \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}$$

folgt der Zusammenhang zwischen Wegelement Δr in der Ebene senkrecht zu \vec{B} mit Wegelement Δk im \vec{k} -Raum:

$$\Delta r = \left(\frac{\hbar}{eB} \right) \Delta k$$

\Rightarrow Zusammenhang zwischen Bahnfläche S_n im \vec{k} -Raum mit Bahnfläche A_n im r^2 -Raum

$$\frac{\Phi_n}{B} = A_n = \left(\frac{\hbar}{eB} \right)^2 S_n \quad (2.27)$$

Aufgelöst nach S_n folgt dann mit (2.26)

$$\begin{aligned} S_n(B) &= \left(\frac{eB}{\hbar} \right)^2 \cdot \frac{1}{B} \cdot (n + \gamma) \frac{2\pi\hbar}{e} \\ &= (n + \gamma) \cdot \frac{2\pi e}{\hbar} \cdot B \quad . \end{aligned} \quad (2.28)$$

Wichtige Frage bei Bestimmung der Fermi-Fläche:

welche Feldänderung $\Delta B = B_n - B_{n+1}$ führt dazu dass benachbarte Bahnen $(n, n+1)$ dieselbe Fläche im k -Raum einnehmen ?

Wir fragen also nach Feldwerten für die gilt

$$S_n(B_n) = S_{n+1}(B_{n+1}) \equiv S .$$

Mit (2.28) lautet diese Bedingung

$$S = (n + \gamma) \cdot \frac{2\pi e}{\hbar} \cdot B_n = (n + 1 + \gamma) \cdot \frac{2\pi e}{\hbar} \cdot B_{n+1}$$

\Rightarrow

$$\frac{S}{B_n} = (n + \gamma) \frac{2\pi e}{\hbar} \quad \text{und} \quad \frac{S}{B_{n+1}} = (n + \gamma) \frac{2\pi e}{\hbar} + \frac{2\pi e}{\hbar}$$

\Rightarrow

$$\frac{S}{B_{n+1}} - \frac{S}{B_n} = S \cdot \left(\frac{1}{B_{n+1}} - \frac{1}{B_n} \right) = \frac{2\pi e}{\hbar} \quad (2.29)$$

wichtiges Ergebnis:

jeweils die gleiche Änderung in $1/B$ um $(2\pi e/\hbar)/S$ liefert identische Bahnen der Fläche S (im k -Raum).

d.h. die Gesamtenergie des Systems oszilliert in $1/B$ mit konstanter Periode

\Rightarrow Die Besetzung von Bahnen auf, oder nahe der Fermi-Fläche oszilliert mit veränderlichem B

\Rightarrow Oszillation verschiedener experimentell zugänglicher Meßgrößen mit $1/B$:

- elektrischer Widerstand
- magnetische Suszeptibilität
- Wärmekapazität

\Rightarrow Oszillationsperiode (in $1/B$) liefert Informationen über die Fermi-Fläche !

experimentelle Voraussetzungen:

- Quantisierung der e^- -Bahnen wird nicht durch Stöße verwischt
- thermische Übergänge zwischen benachbarten Bahnen sind selten

\Rightarrow Effekt beobachtbar:

- in reinen Proben
- bei tiefen Temperaturen
- in starkem Magnetfeld

Es gibt eine ganze Vielfalt von experimentellen Methoden zur Untersuchung von Fermi-Flächen – eine Auswahl ist in Abb.2.18 zusammengefaßt.

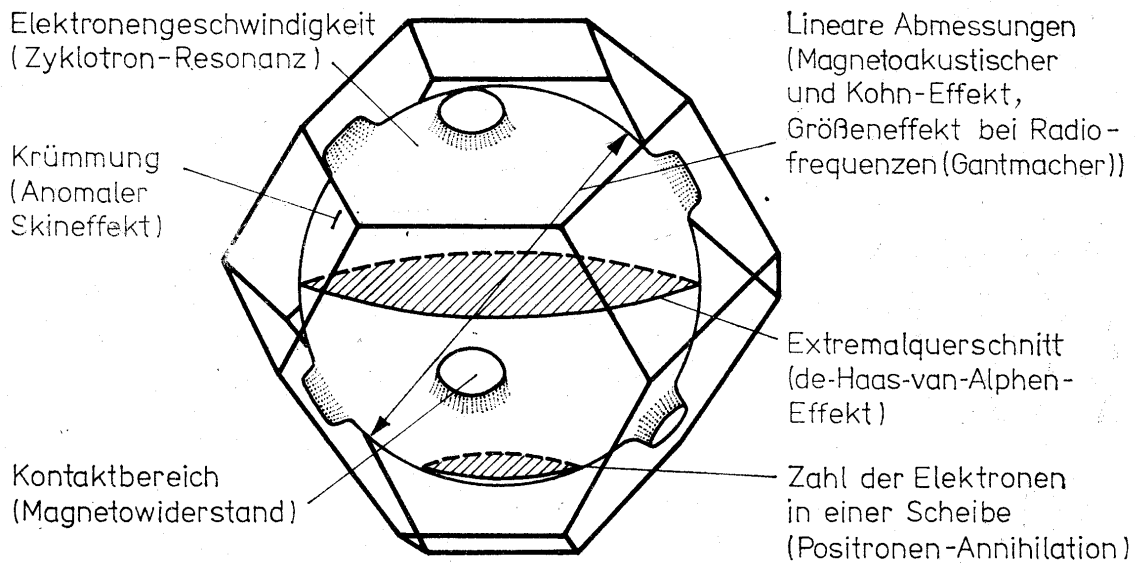


Abb. 2.18: Die experimentelle Ermittlung der Fermi-Fläche [aus Weißmantel, Hamann, *Grundlagen der Festkörperphysik* (1979); Abb.8.29].

2.3.1 De Haas van Alpen Effekt

= Quantenoszillationen des magnetischen Moments, bzw. der magnetischen Suszeptibilität eines Metalls als Funktion eines statischen Magnetfeldes B

Aufgrund der Bahnquantisierung entstehen (bei $T = 0$) die unten dargestellten Landau-Niveaus (in 2 Dimensionen)

Ihre Lage, und damit die Gesamtenergie hängt vom B -Feld ab:

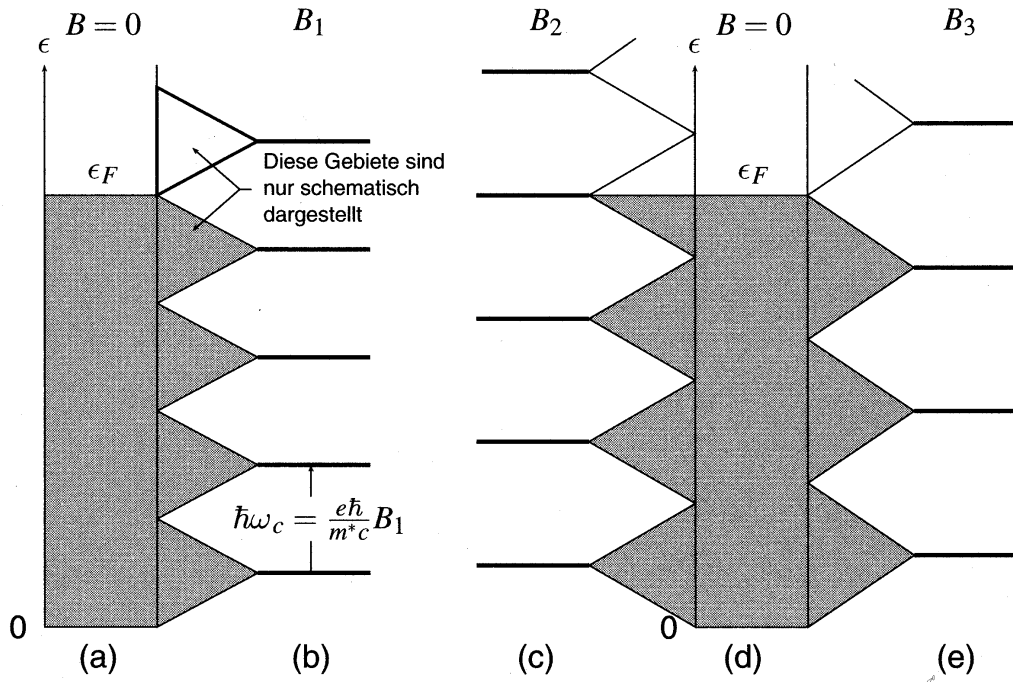


Abb. 2.19: Erklärung des de Haas-van-Alphen-Effekts im Zweidimensionalen für ein freies Elektronengas in einem Magnetfeld. In (a) und (d) sind die besetzten Zustände des Fermi-Sees ohne Magnetfeld schattiert dargestellt. (b), (c) und (e) zeigen die Energieniveaus im Magnetfeld. In (b) hat das Feld den Wert B_1 derart, dass die Gesamtenergie der Elektronen dieselbe ist wie ohne Magnetfeld: ein Teil der Elektronen hat seine Energie erhöht, genauso viele haben sie erniedrigt durch die Bahnquantisierung im Magnetfeld B_1 . Vergrößert man das Feld auf B_2 , so erhöht sich auch die Gesamtenergie der Elektronen, weil die obersten Elektronen ihre Energie erhöht haben. Im Fall (e) ist für das Feld B_3 die Energie wieder gleich jener im Feld $B = 0$. Die Gesamtenergie hat ein Minimum in den Punkten B_1, B_3, B_5, \dots und ein Maximum in den Punkten B_2, B_4, \dots [aus Ch. Kittel, *Einführung in die Festkörperphysik* (1999); Abb.9.23].

Quantitative Diskussion im \vec{k} -Raum:

$B \neq 0 \Rightarrow$ Umverteilung der Zustände auf Landau-Zylinder (in 3 Dimensionen)

- betrachte zunächst 2-dim. Schnitt im (k_x, k_y) -Raum (d.h. $k_z = \text{const}$)

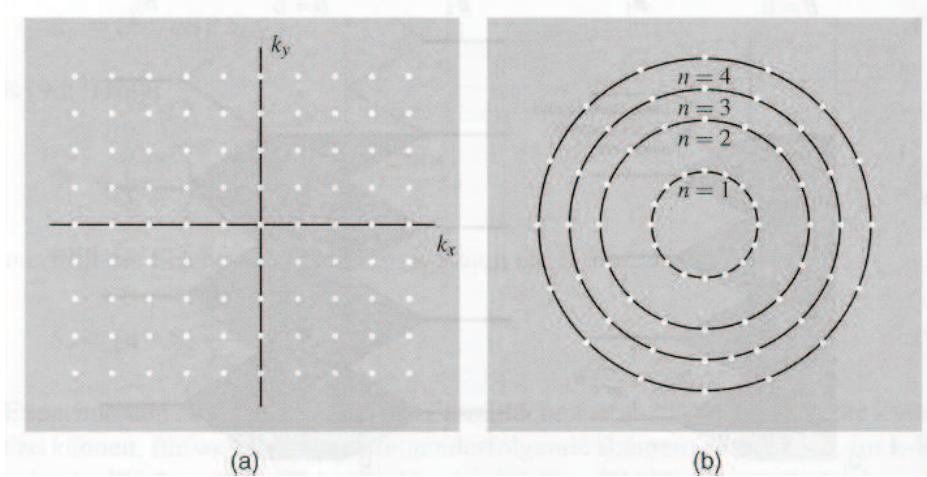


Abb. 2.20: (a) Erlaubte Elektronenzustände in zwei Dimensionen in Abwesenheit eines Magnetfeldes. (b) Im Magnetfeld können die Punkte, welche die Zustände freier Elektronen darstellen, auf Kreisen in der früheren $k_x k_y$ -Ebene angeordnet werden. Die aufeinanderfolgenden Kreise entsprechen aufeinanderfolgenden Werten der Quantenzahl n der Energie $(n - \frac{1}{2})\hbar\omega_c$. Die Fläche zwischen aufeinanderfolgenden Kreisen ist $2\pi eB/\hbar$. Die Winkelposition der Punkte hat keine Bedeutung. Die Anzahl der Zustände auf einem Kreis ist konstant und gleich der Fläche zwischen aufeinanderfolgenden Kreisen, multipliziert mit der Anzahl der Zustände pro Einheitsfläche in (a), oder $(2\pi eB/\hbar) \cdot (L/2\pi)^2 = L^2 eB/h$, wobei der Elektronenspin vernachlässigt wurde [aus Ch. Kittel, *Einführung in die Festkörperphysik* (1999); Abb.9.24].

Die Fläche S_n einer Bahn ist nach (2.28) quantisiert.

Flächenunterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Bahnen $(n - 1, n)$:

$$\Delta S = S_n - S_{n-1} = \frac{2\pi e}{\hbar} \cdot B \quad (2.30)$$

Ein einzelner Zustand nimmt im 2-dim. k -Raum die Fläche $(2\pi/L)^2$ ein (für quadratische Probe der Länge L ; Spin vernachlässigt)

\Rightarrow Die Zahl der Zustände pro Landau-Niveau ist

$$D = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \cdot \Delta S = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \frac{2\pi e}{\hbar} \cdot B = \rho B \quad (2.31)$$

mit $\rho \equiv L^2 \cdot e/h$. D.h. die Zahl der Zustände ist auf jedem Landau-Niveau (mit Quantenzahl n) gleich und hängt nur von B (und Probengröße) ab.

Fermi-Energie hängt nun stark von B ab:

Betrachte System von N Elektronen

bei einem Feld B_2 seine alle Landau-Niveaus bis zur Quantenzahl $n = s$ gerade vollständig besetzt, und das Niveau $s + 1$ sei teilweise besetzt
 \Rightarrow Fermi-Niveau liegt im Landau-Niveau $s + 1$.

Erhöhung des B -Feldes

\Rightarrow Zustandsdichte aller Niveaus wird größer

\Rightarrow Übergänge der Elektronen auf tiefer liegende Niveaus

\Rightarrow das $s + 1$ -Niveau wird bei **kritischem Feld** B_s frei

\Rightarrow Fermi-Niveau geht abrupt auf Landau-Niveau s über.

Bei $B = B_s$ sind alle Landau-Niveaus bis zum Zustand s vollständig besetzt.
 Somit gilt

$$s\rho B_s = N \quad (2.32)$$

(d.h. die Dichte der Zustände auf den Landau-Niveaus multipliziert mit der Zahl der besetzten Landau-Niveaus ist die Gesamtzahl der Elektronen)

Weitere Erhöhung des Feldes, bis Niveau s gerade vollständig entleert wird
 \rightarrow Fermi-Niveau geht auf $s - 1$ -Niveau über bei B_{s-1} mit

$$(s - 1)\rho B_{s-1} = N$$

Zusammenhang der kritischen Felder:

Mit $B_s^{-1} = s \cdot \rho/N$ und $B_{s-1}^{-1} = (s - 1) \cdot \rho/N$ gilt

$$\frac{1}{B_s} - \frac{1}{B_{s-1}} = \frac{\rho}{N} = L^2 \cdot \frac{e}{h} \cdot \frac{1}{N} = \text{const} \quad (2.33)$$

D.h., das Fermi-Niveau – aufgetragen über das inverse Magnetfeld – macht Sprünge mit der (konstanten) Periode

$$\Delta\left(\frac{1}{B}\right) = \frac{\rho}{N} = \frac{2\pi e}{h} \frac{1}{S}$$

Hierbei ist S die von der Fermi-Fläche (höchstes besetztes Landau-Niveau) eingeschlossene Fläche im 2-dim (k_x, k_y) -Raum [s. Gl.(2.29)].

Gesamtenergie der Elektronen

Im folgenden betrachten wir die Änderung der Gesamtenergie des Systems mit veränderlichem Magnetfeld.

Hierzu nutzen wir Gl.(2.17) für die Energie der Landau-Niveaus

$$E = \hbar\omega_c \left(n - \frac{1}{2}\right), \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.34)$$

mit der Zyklotronfrequenz $\omega_c \equiv eB/m^*$.

Gesamtenergie der Elektronen in **vollständig besetzten Niveaus** (bis $n = s$):

$$\sum_{n=1}^s D \cdot \hbar\omega_c \left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} D \hbar\omega_c \cdot \sum_{n=1}^s (2n - 1) = \frac{1}{2} D \hbar\omega_c \cdot s^2 \quad (s = 1, 2, \dots) \quad (2.35)$$

$$(D = \text{Zustände/Zylinder} = \rho B)$$

Energie der Elektronen im **teilweise besetzten Niveau** $s + 1$:

$$\hbar\omega_c \left(s + \frac{1}{2}\right) (N - sD)$$

(N : Gesamtzahl; sD : Zustände in tieferen Niveaus)

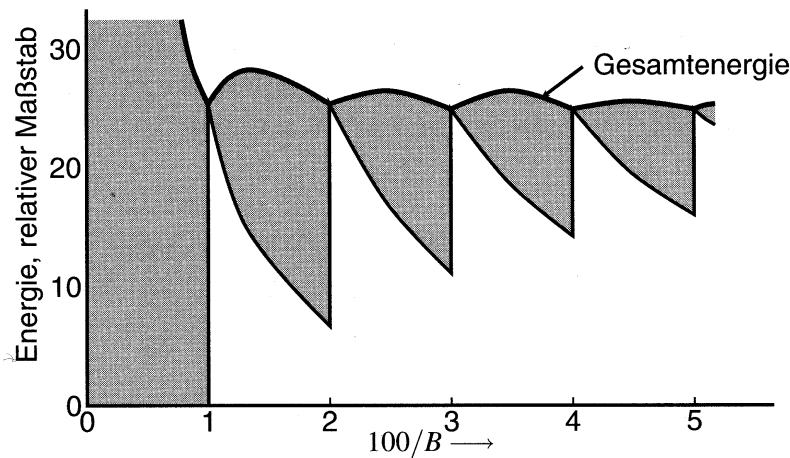


Abb. 2.21: Die obere Kurve stellt die gesamte Elektronenenergie dar, aufgetragen gegen $1/B$. Die Oszillationen der Energie U können durch Messung des magnetischen Moments, gegeben durch $-\partial U/\partial B$, nachgewiesen werden. thermische und Transporteigenschaften des Metalls oszillieren ebenfalls, wenn aufeinanderfolgende Bahnzustände mit zunehmendem Magnetfeld das Fermi-Niveau schneiden. Die schattierten Flächen im Bild geben den Beitrag der nur teilweise besetzten Niveaus zur Energie wieder. Parameter: $N = 50$, $\rho = 0.5$, die Einheiten von B sind so gewählt, dass $B = \hbar\omega_c$. [aus Ch. Kittel, *Einführung in die Festkörperphysik* (1999); Abb.9.26].

$\Rightarrow E_{ges}$ oszilliert in $1/B$; Periode:

$$\Delta\left(\frac{1}{B}\right) = \frac{\rho}{N} = \frac{2\pi e}{\hbar} \frac{1}{S} \quad (2.36)$$

Experiment:

Messung der Magnetisierung M , bzw. der magnetischen Suszeptibilität $\chi = \partial M / \partial H$.

Mit der freien Energie $F = U - TS$ (U : innere Energie, S : Entropie) gilt für $M = -(1/N)(\partial U / \partial B)_{T,V}$ bei sehr tiefen Temperaturen:

$M = -\partial E / \partial B$; oszilliert im starken Magnetfeld ebenfalls mit $1/B$

= **de Haas van Alphen Effekt**

Wiederum ist die Periode der Oszillation gegeben durch Gl.(2.36)

$$\Delta \left(\frac{1}{B} \right) = \frac{2\pi e}{\hbar} \frac{1}{S}$$

Im Experiment findet man für S die Extremalbahn (s.u.) der Fermi-Fläche senkrecht zu \vec{B} .

⇒ aus der Messung der Magnetisierung (bzw. der magnetischen Suszeptibilität) kann auf die Extremalflächen S der Fermi-Flächen geschlossen werden

→ Informationen über Form & Größe der Fermi-Fläche

3-dimensionale Betrachtung:

Das angelegte Magnetfeld zeige in z -Richtung.

Komplikation: Die Fermi-Fläche variiert entlang k_z

⇒ Überlagerung von Oszillationen von verschiedenen Bahnen?

Man kann jedoch zeigen: dominanter Beitrag zu M durch Bahnen, die gegenüber kleinen Änderungen von k_z stationär sind = "Extremalbahnen"

andere Bahnen → e^- laufen mit stark unterschiedlichen Phasen; Signale kompensieren sich weg

→ **Periode in M liefert Extremalbahnen der Fermi-Fläche**

Bsp.1: Kugel → Äquator

Bsp.2: komplizierte Fermi-Fläche:

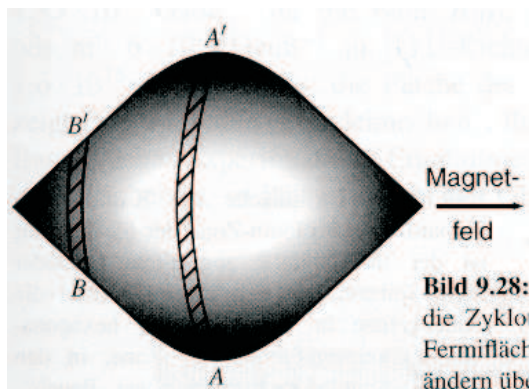


Abb. 2.22: Die Bahnen im Abschnitt AA' sind Extremalbahnen: die Zyklotronperiode ist über ein genügend breites Stück der Fermi-Fläche annähernd konstant. Bahnen in Abschnitten wie BB' ändern über diese Breite ihre Periode. [aus Ch. Kittel, *Einführung in die Festkörperphysik* (1999); Abb.9.28].

Experimentelle Voraussetzungen

- hohe, homogene Felder > 10 T (für $B = 10$ T; $\hbar\omega_c \approx 1$ meV)
- tiefe Temperaturen $kT \ll \hbar\omega_c$ ($T \ll 10$ K bei 10 T)
- geringe Streuraten; $\omega_c\tau \ll 1 \rightarrow$ reine Materialien, tiefe Temperaturen
erste Beobachtungen des dHvA: D. Shoenberg, Cambridge

dHvA-Oszillationen für verschiedene Feld-Orientierungen
 \rightarrow Form der Fermi-Fläche erschließbar

Beispiele:

Fermi-Fläche von Kupfer

deutliche Abweichung von der Kugelform

\rightarrow acht Hälse berühren hexagonale Begrenzungsfläche der 1.BZ
 (wegen Erniedrigung der Bandenergie in der Nähe der Zonengrenze)

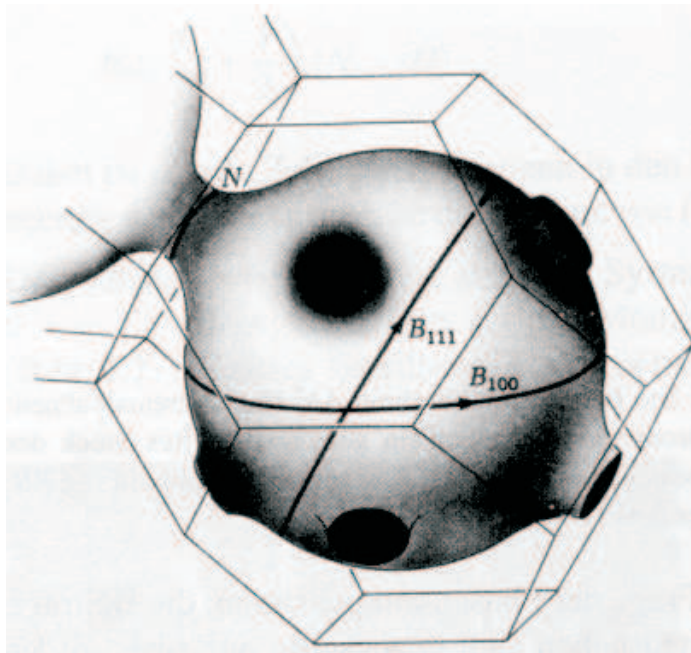


Abb. 2.23: Fermi-Fläche von Kupfer nach Pippard. Die BZ der fcc-Struktur ist ein Oktaeder. Die Fermi-Fläche berührt die Zonengrenze in der Mitte der hexagonalen Begrenzungsflächen der Zone in den $[111]$ -Richtungen im \vec{k} -Raum. Zwei "Bauch"-Extremalbahnen sind dargestellt und mit B bezeichnet; die "Hals"-Extremalbahn ist mit N bezeichnet [aus Ch. Kittel, *Einführung in die Festkörperphysik* (1999); Abb.9.29].

Fermi-Fläche von Gold

Über weiten Bereich von Feldrichtungen:
Magnetisches Moment zeigt Periode $2 \cdot 10^{-5} \text{ T}^{-1}$

entspricht einer ExtremalBahn der Fläche

$$S = \frac{2\pi e}{\hbar} \cdot \frac{1}{\Delta(1/B)} \approx \frac{9.55 \cdot 10^{15} (\text{Vs})^{-1}}{2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{Vs}} \approx 4.8 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-2}$$

Zum Vergleich:

Abschätzung für Fermi-Kugel freier Elektronen in Gold

$$\rightarrow k_F = 1.2 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{Extremalfläche } 4.5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-2}$$

(gute Übereinstimmung mit Experiment)

Genauer experimentelles Ergebnis:

- Periode $2.05 \cdot 10^{-5} \text{ T}^{-1}$ für Bahn B_{111}
- Periode $1.95 \cdot 10^{-5} \text{ T}^{-1}$ für Bahn B_{100} (siehe Bild 2.23)

weitere Perioden:

- große Periode $6 \cdot 10^{-4} \text{ T}^{-1}$ in $[111]$ -Richtung \rightarrow Bahnfläche $4.5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-2}$
 \rightarrow "Halsbahn" N
- "Hundeknochenbahn" mit 0.4-fachem der Bauchfläche

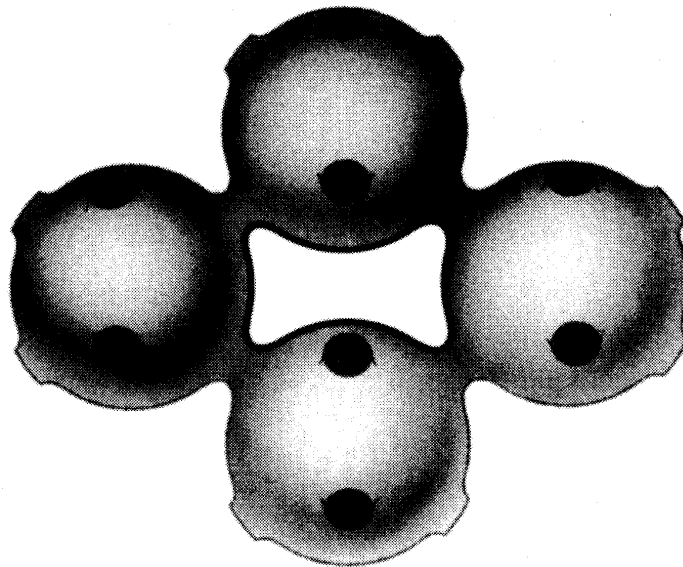


Abb. 2.24: Hundeknochen-Bahn eines Elektrons auf der Fermi-Fläche von Kupfer oder Gold in einem Magnetfeld. Dies ist eine lochartige Bahn, weil die Energie zum Innern der Bahn hin zunimmt. [aus Ch. Kittel, *Einführung in die Festkörperphysik* (1999); Abb.9.30].

Messung der Hundeknochenbahn:

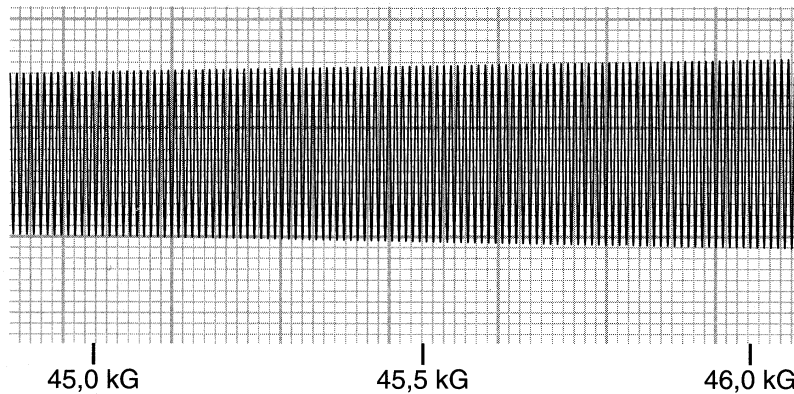


Abb. 2.25: De Haas-van Alphen-Effekt in Gold mit \vec{B} in [110]-Richtung. Die Oszillationen stammen von der Hundeknochen-Bahn des Bildes 2.24. [aus Ch. Kittel, *Einführung in die Festkörperphysik* (1999); Abb.9.31].

verwandter Effekt:

Oszillationen in elektrischer Leitfähigkeit mit $1/B$

= **Shubnikov-de-Haas-Effekt**

Oszillationen werden in fast allen Transportgrößen beobachtet

Magnetischer Zusammenbruch

für sehr starke Felder $\rightarrow e^-$ bewegen sich wie freie Teilchen auf Zyklotronbahnen;
(magnetische Energie dominiert gegenüber Gitterpotential
 \rightarrow Zuordnung der Zustände zu Bändern wenig sinnvoll)

Energiebedingung:¹ $\hbar\omega_c \cdot \epsilon_F > E_g^2$ (E_g : Energielücke)

ist insbes. für Metalle mit kleiner Lücke wesentlich schwächer als Forderung $\hbar\omega_c > E_g$

Übergang zu starken B -Feldern kann e^- -Bahnen drastisch verändern

\rightarrow zeigt sich in physikalischen Eigenschaften – wie Magnetwiderstand –
die empfindlich von der Art der Bahnen abhängen.

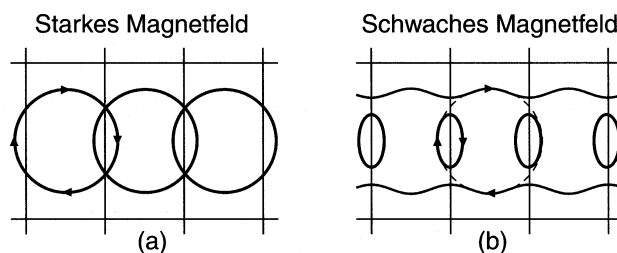


Abb. 2.26: Zusammenbruch der Bandstruktur in einem starken Magnetfeld. Dünne Linien kennzeichnen die Grenzen der Brillouin-Zone. Die Bahnen freier Elektronen (a) in einem starken Feld ändern ihre topologische Natur in einem schwachen Feld (b) und werden zu offenen Bahnen im ersten Band und zu Elektronenbahnen im zweiten Band. Beide Bänder sind gemeinsam gezeichnet. [aus Ch. Kittel, *Einführung in die Festkörperphysik* (1999); Abb.9.33].

¹Zur Begründung siehe z.B. Anhang J in Ashcroft, Mermin *Festkörperphysik*, (2001).

Weitere Untersuchungsmethoden:• **Anomaler Skineffekt**

- **Normaler Skineffekt:** elektromagnetische Welle wird im Metall

exponentiell gedämpft $E \sim e^{-x/\delta_0}$

→ **Skineindringtiefe** $\delta_0 = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \sigma}}$

(mit elektrischer Leitfähigkeit σ)

Bsp.: reines Cu

T	$\lambda = 1 \text{ cm}$ $\nu = 30 \text{ GHz}$	$\lambda = 1 \mu\text{m}$ $\nu = 300 \text{ THz}$
300 K	400 nm	4 nm
4 K	10 nm	0.1 nm

Voraussetzung: Lokalität der Leitereigenschaften

$E = \text{const}$ über mittlere freie Weglänge ℓ

→ $\ell \ll \delta_0$

aber: für reines Cu ($T = 4 \text{ K}$) ist $\ell \sim 100 \mu\text{m} \gg \delta_0 \Rightarrow$ **Anomaler Skineffekt !**

Beitrag zur Abschirmung der elektromagnetischen Welle kommt nur von Elektronen an der Oberfläche ($v_x \approx 0$) → **neue Eindringtiefe** δ

Ansatz (Pippard): reduzierte effektive Ladungsträgerkonzentration

$$n_{eff} = \frac{\delta}{\ell} \cdot n < n$$

$$\Rightarrow \sigma_{eff} = \frac{\delta}{\ell} \cdot \sigma = \frac{\delta}{\ell} \cdot \frac{ne^2\tau}{m}$$

($\tau = \ell/v_F$ mittlere Zeit zwischen zwei Stößen)

$$\Rightarrow \sigma_{eff} = \delta \cdot \frac{ne^2}{mv_F}$$

nun **unabhängig von ℓ !**

Übergang $\delta_0(\sigma) \rightarrow \delta(\sigma_{eff})$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \sigma_{eff}}} = \sqrt{\frac{2mv_F}{\mu_0 \omega ne^2 \delta}}$$

somit

$$\delta = \left(\frac{2mv_F}{\mu_0 \omega ne^2} \right)^{1/3} \propto \left(m \frac{v_F}{\omega} \right)^{1/3} \quad (2.37)$$

Beitrag nur von Gürtel ($v_x \approx 0$) der Fermi-Fläche !

Bei anisotroper Fermi-Fläche:

Abhängigkeit des Oberflächenwiderstands von Kristallrichtung

→ lieferte ersten experimentellen Hinweis auf Anisotropie der Fermi-Fläche in Cu (Pippard, 1957)

Nachteil der Methode:

komplizierte Auswertung → einfacher mit dHvA-Effekt

• Zyklotronresonanz

Anlegen eines statischen Magnetfeldes

$$\vec{F} = \hbar \dot{\vec{k}} = (-e/\hbar) \nabla_{\vec{k}} \epsilon \times \vec{B}$$

→ Elektron bewegt sich auf Fermi-Fläche auf Kreisbahn
mit Zyklotronfrequenz $\omega_c = eB/m_c$ (m_c : Zyklotronmasse)
(hier: Annahme $\tau > 1/\omega_c$)

Sei k_{\parallel} die Komponente des Wellenvektors entlang der Bahn auf der Fermi-Fläche
und

k_{\perp} die Komponente des Wellenvektors senkrecht zur Fermi-Fläche,
dann gilt

$$\dot{k} = \frac{dk_{\parallel}}{dt} = \frac{eB}{\hbar^2} \frac{d\epsilon}{dk_{\perp}}$$

Umlaufzeit:

$$\frac{2\pi}{\omega_c} = T = \oint dt = \oint \frac{dk_{\parallel}}{\dot{k}} = \frac{\hbar^2}{eB} \oint dk_{\parallel} \cdot \frac{dk_{\perp}}{d\epsilon} = \frac{\hbar^2}{eB} \left(\frac{dA}{d\epsilon} \right)$$

Hierbei ist A die von der Umlaufbahn eingeschlossene Fläche.

Damit gilt für die **Zyklotronmasse**

$$m_c = \frac{eB}{\omega_c} = \frac{\hbar^2}{2\pi} \left(\frac{dA}{d\epsilon} \right) \quad (2.38)$$

Die Zyklotronmasse enthält also die **Energieabhängigkeit der Bahnfläche A (im \mathbf{k} -Raum)**.

Anmerkung:

m_c (integrale Größe) ist i. allg. nicht identisch mit der effektiven Masse m^* .

Nur im Fall quasi-freier Elektronen gilt $m_c = m^*$

Experiment:

Anlegen eines elektrischen Wechselfeldes $\vec{E} \perp \vec{B}$; mit Frequenz ω

→ **Resonanzabsorption** wenn $\omega = \omega_c$

Wie bei dem dHvA-Effekt tragen auch hier nur Extremalbahnen zu Resonanz bei

- bei Halbleitern → gesamtes Volumen trägt zur Resonanz bei

- Metalle: Beitrag nur von Oberfläche wegen Skin-Effekt

experimenteller Aufbau:

Festkörper in Hohlraumresonator

→ Bestrahlung mit Mikrowellen (GHz-Bereich)

typische Magnetfelder 10 mT bis 1 T

Meßgröße: Absorption der Mikrowelle od. Oberflächenimpedanz

Azbel-Kaner-Anordnung (Zyklotronresonanz in Metallen):

\vec{B} und \vec{E} parallel zur Metall-Oberfläche

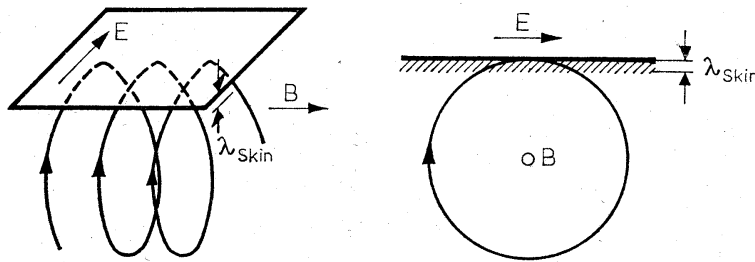


Abb. 2.27: Schematische Darstellung der Anordnung zur Messung der Zyklotronresonanz in einem Metall. [aus Weissmantel, Hamann, *Grundlagen der Festkörperphysik* (1978); Abb.8.30].

→ Elektronen werden nur über Bruchteil der Anregungsperiode des elektrischen Wechselfeldes beschleunigt (d.h. solange sie sich innerhalb der Skineindringtiefe an der Oberfläche befinden)

Beispiel (für Cu):

- $\delta \sim 40 \text{ nm}$ (bei 4 K und $\sim 2 \text{ GHz}$);
- $\omega_c \sim 10 \text{ GHz}$ (bei $B \sim 0.1 \text{ T}$ und mit $m_c \sim 1.5m_0$)
- $v_F \approx 1.6 \cdot 10^8 \text{ cm/s}$
- Zyklotronradius $r_c = v_F/\omega_c \approx 100 \mu\text{m} \gg \delta$
- ⇒ Resonanz auch bei

$$\omega = n \cdot \omega_c = n \cdot B \cdot \frac{e}{m_c}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.39)$$

Experiment: Variation von B bei $\omega = \text{const}$ (konstante Skineindringtiefe)

→ Resonanz bei

$$B = \frac{1}{n} B_c \quad \text{mit} \quad B_c \equiv \frac{m_c \omega}{e} \quad (2.40)$$

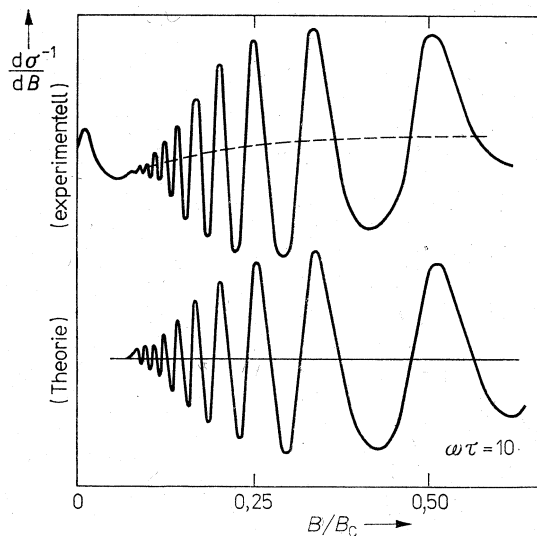


Abb. 2.28: Zyklotronresonanz in Kupfer bei 24 GHz [aus Weissmantel, Hamann, *Grundlagen der Festkörperphysik* (1978); Abb.8.31].

Metall	Li	Na	U	Cu	Ag	Au
m_c^*/m_0	2.4	1.3	1.1	1.5	1.0	1.0
Metall	Be	Mg	Ca	Zn	Cd	Hg
m_c^*/m_0	0.46	1.43	0.8	0.9	0.75	2
Metall	Al	Ga	In	Tl	Sn	Pb
m_c^*/m_0	1.6	0.4	1.3	1.15	1.2	2.1

Tabelle 2.2: Effektive Masse von Metallen, bestimmt durch Messung der Zyklotronresonanz [aus Weissmantel, Hamann, *Grundlagen der Festkörperphysik* (1978); Tab.8.7].

• Magnetoakustischer Effekt

Oszillationen der Schallgeschwindigkeit und der Absorption von Schallwellen (mit Wellenlänge λ_S und Wellenvektor \vec{q})

in starkem, homogenen, statischen Magnetfeld ($\vec{B} \perp \vec{q}$)

tritt auf bei sehr tiefen Temperaturen und in hochreinen Metall-Einkristallen

Periode

$$\Delta \left(\frac{1}{B} \right) = \frac{e \lambda_S (n + \frac{1}{4})}{\hbar 2k_{F,ex}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.41)$$

→ liefert **Extremaldurchmesser** $2k_{F,ex}$ **der Fermi-Fläche**

Mechanismus:

Funktioniert besonders gut wenn die Auslenkung der Atome \perp Ausbreitungsrichtung und $\perp B$:

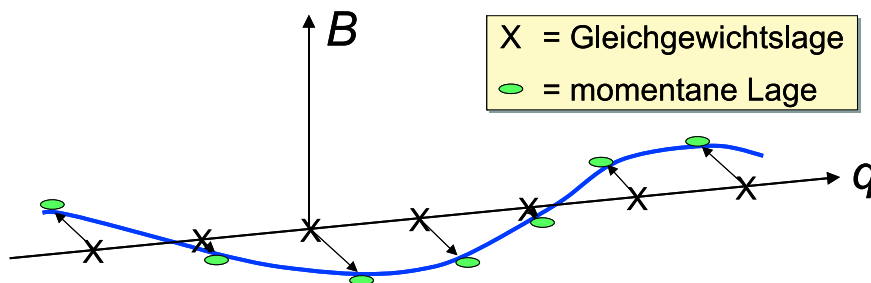


Abb. 2.29: Die momentanen Gleichgewichtsauslenkungen der Atomrümpfe in einer zur Messung des magneto-akustischen Effekts geeigneten Schallwelle. Nur eine einzelne Reihe von Atomrümpfen ist dargestellt. [nach N.W. Ashcroft, N.D. Mermin *Festkörperphysik* (2001); Abb.14.6].

Atomrümpfe sind elektrisch geladen \Rightarrow Schallwelle induziert elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{k})$ mit gleichem Wellenvektor, gleicher Frequenz und gleicher Polarisation.

(Leitungs-)Elektronen wechselwirken mit diesem E -Feld

→ Behinderung oder Erleichterung der Ausbreitung der Schallwelle.

Falls $\omega_c \tau \gg 1$: Elektronen durchlaufen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen (in Zeit τ) viele Bahnkurven im B -Feld.

\Rightarrow Abschwächung der Schallwelle in Abhängigkeit von ihrer Wellenlänge λ_S .

Diese Abhängigkeit spiegelt die Topologie der Fermi-Fläche wider.

Begründung:

Ist λ_S vergleichbar mit der räumlichen Ausdehnung ℓ_c der Elektronenbahn² dann hängt das Ausmaß der Störung der Elektronenbewegung durch das elektrische Feld der Welle von dem Verhältnis λ_S/ℓ_c ab (ℓ_c : maximale lineare Ausdehnung der Bahnkurve in Richtung der Ausbreitung der Schallwelle = "Durchmesser" der Bahnkurve).

Befinden sich z.B. Elektronen auf Bahndurchmessern $\ell_c = \lambda_S/2$ [Abb.2.30(a)] so können sie von der Welle während ihres gesamten Umlaufs beschleunigt (oder verzögert) werden. Ist dagegen $\ell_c = \lambda_S$ dann kompensieren sich Beschleunigung und Verzögerung im E -Feld gerade [Abb.2.30(b)] .

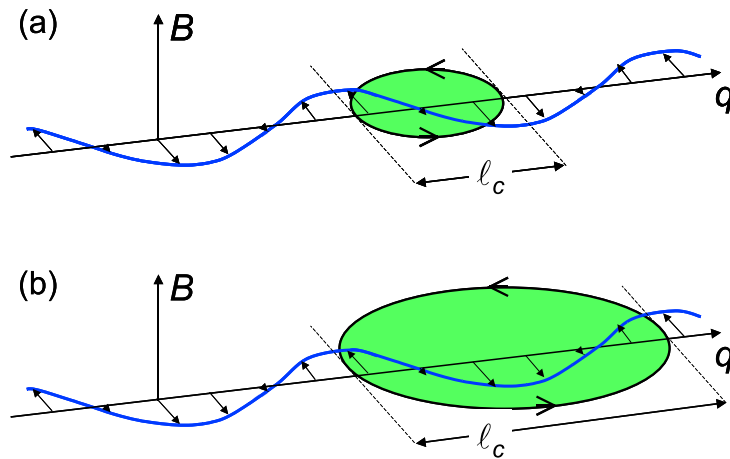


Abb. 2.30: (a) eine Elektronenbahn mit Durchmesser $\ell_c = \lambda_S/2$. Aufgrund der Lage der Bahn wird das Elektron auf ihr in jedem Bahnpunkt durch das die Schallwelle begleitende E -Feld beschleunigt. (b) Elektronenbahn mit Durchmesser $\ell_c = \lambda_S$. Unabhängig von der Position der Bahn in Richtung von \vec{q} ist die in (a) gegebene, kohärente Beschleunigung (oder Verzögerung) über die gesamte Länge der Bahn hier nicht möglich. [nach N.W. Ashcroft, N.D. Mermin *Festkörperphysik* (2001); Abb.14.7].

Allgemeiner Fall:

Die Stärke der Kopplung (an die Schallwelle) eines Elektrons auf einer Zyklotronbahn hängt von der Wellenlänge λ_S der Schallwelle ab:

$$\begin{aligned} \ell_c &= n\lambda_S && \text{schwach gekoppelt} \\ \ell_c &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda_S && \text{stark gekoppelt} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Nur Elektronen nahe der Fermi-Fläche können zur Schallabschwächung beitragen (wegen Pauli-Prinzip³). Ähnlich wie bei dem de Haas-van Alphen-Effekt tragen nur Extremalquerschnitte der Fermi-Flächen bei.

²Durchmesser einer typischen Bahnkurve $\ell_c \approx v_F/\omega_c$. Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwelle ist $v_S = \omega_S/q \rightarrow$ Kreisfrequenz der Schallwelle $\omega_S = 2\pi v_S/\lambda_S \approx 2\pi v_S/\ell_c \approx 2\pi\omega_c v_F/v_S$. Typische Schallgeschwindigkeit ist $v_s \approx v_F/100 \Rightarrow \omega_S \approx 2\pi\omega_c \cdot 100 \gg \omega_c \Rightarrow$ Elektronen durchlaufen viele Bahnen während der Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega_S$ einer Schallwelle. Das bedeutet auch dass das von der Schallwelle erzeugte störende elektrische Feld während des Umlaufs eines Elektrons im B -Feld als quasistatisch betrachtet werden kann.

³Das Pauli-Prinzip verbietet dass Elektronen mit Energien $\ll \epsilon_F$ Energie mit der Schallwelle austauschen.

• Gantmacher-Effekt

Gehört zu einer Gruppe von Experimenten die Resonanzeffekte misst wenn Elektronenbahnen exakt zwischen die beiden planparallelen Oberflächen einer sehr dünnen Probe "passen" ('size effect').

Im Fall des Gantmacher-Effekts:

→ Oszillationen in Absorption, Reflexion und Transmission von Radiowellen ($\nu \approx MHz$) im statischen Magnetfeld, bei tiefen Temperaturen

Oszillationsperiode

$$\Delta \left(\frac{1}{B} \right) = \frac{e}{\hbar} \frac{d}{2k_{F,extr}} \quad (2.43)$$

→ liefert ebenfalls **Extremaldurchmesser** $2k_{F,ex}$ **der Fermi-Fläche**

Direkteste Methode: **Parallelfeld-Gantmacher-Effekt**

Anordnung:

- Radiowellen treffen senkrecht auf dünne einkristalline Metallschicht (Dicke $d \approx \ell \gg \delta_0$ Skineindringtiefe → 'anormaler Bereich')
- Magnetfeld parallel zur Oberfläche (typisch 10...100 mT)

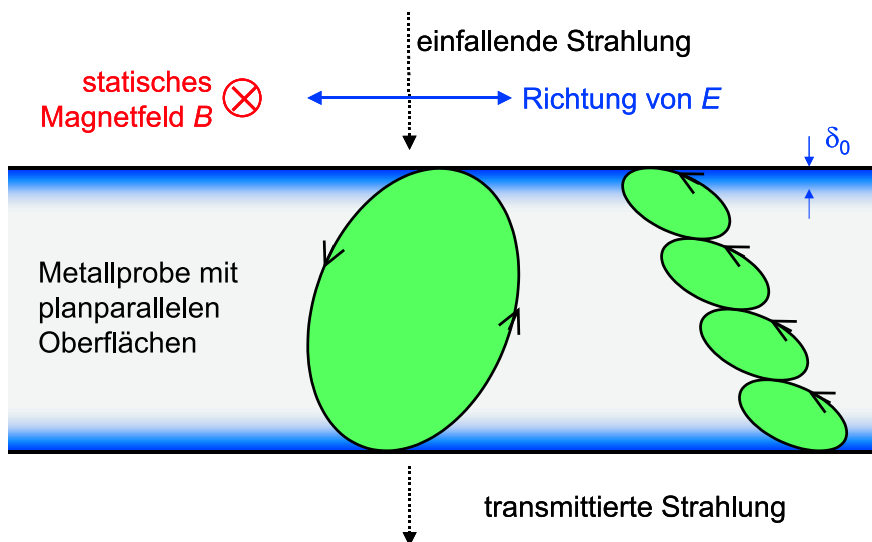


Abb. 2.31: Parallelfeld-Gantmacher-Effekt: Stimmt ein extremaler Bahndurchmesser – oder ein ganzzahliges Vielfaches eines extremalen Bahndurchmessers – mit der Probendicke überein, so beobachtet man resonante Transmission durch die Probe. Das Feld dringt nur bis zur Skintiefe in das Metall ein (oberer schattiert gezeichneter Bereich), und nur Elektronen innerhalb der Skintiefe können Energie aus dem Metall heraus wieder abstrahlen (unterer schattiert gezeichneter Bereich). [nach N.W. Ashcroft, N.D. Mermin *Festkörperphysik* (2001); Abb.14.10].

Mechanismus:

Elektrisches Feld wirkt nur auf Elektronen innerhalb der Skineindringtiefe – umgekehrt können nur Elektronen innerhalb der Skintiefe an der Oberfläche Energie aus dem Metall abstrahlen.

Betrachte Elektronen auf Bahnkurve, deren Durchmesser gerade in die Filmdicke passt: Elektronen auf solchen Bahnkurven können den von dem eingestrahlten E -Feld an der Oberseite erzeugten Strom an der Unterseite der Probe "reproduzieren", d.h. als elektromagnetische Energie abstrahlen.

⇒ resonante Zunahme der Transmission wenn das Magnetfeld so eingestellt ist dass die Bahndurchmesser für Elektronen auf der Fermi-Fläche mit der Probendicke zusammenpassen.

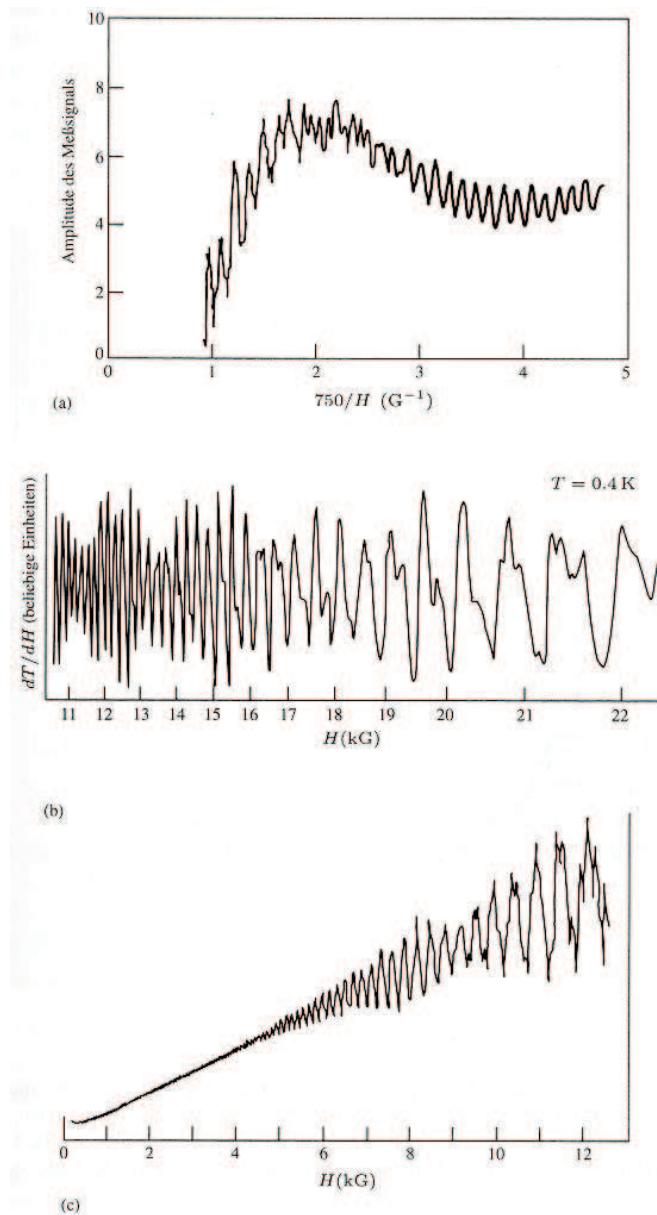
Beispiele für Oszillationen verschiedener Meßgrößen im B-Feld:

Abb. 2.32: Beispiele für die fast allgegenwärtigen Oszillationen, deren berühmteste den de Haas-van Alphen-Effekt ausmacht: (a) **Schallabschwächung** in Wolfram, (b) Feldabhängigkeit von dT/dH in Antimon, (c) **Magnetwiderstand** von Gallium in Abhängigkeit von der Feldstärke bei 1.3 K, [nach N.W. Ashcroft, N.D. Mermin *Festkörperphysik* (2001); Abb.14.3a-c].

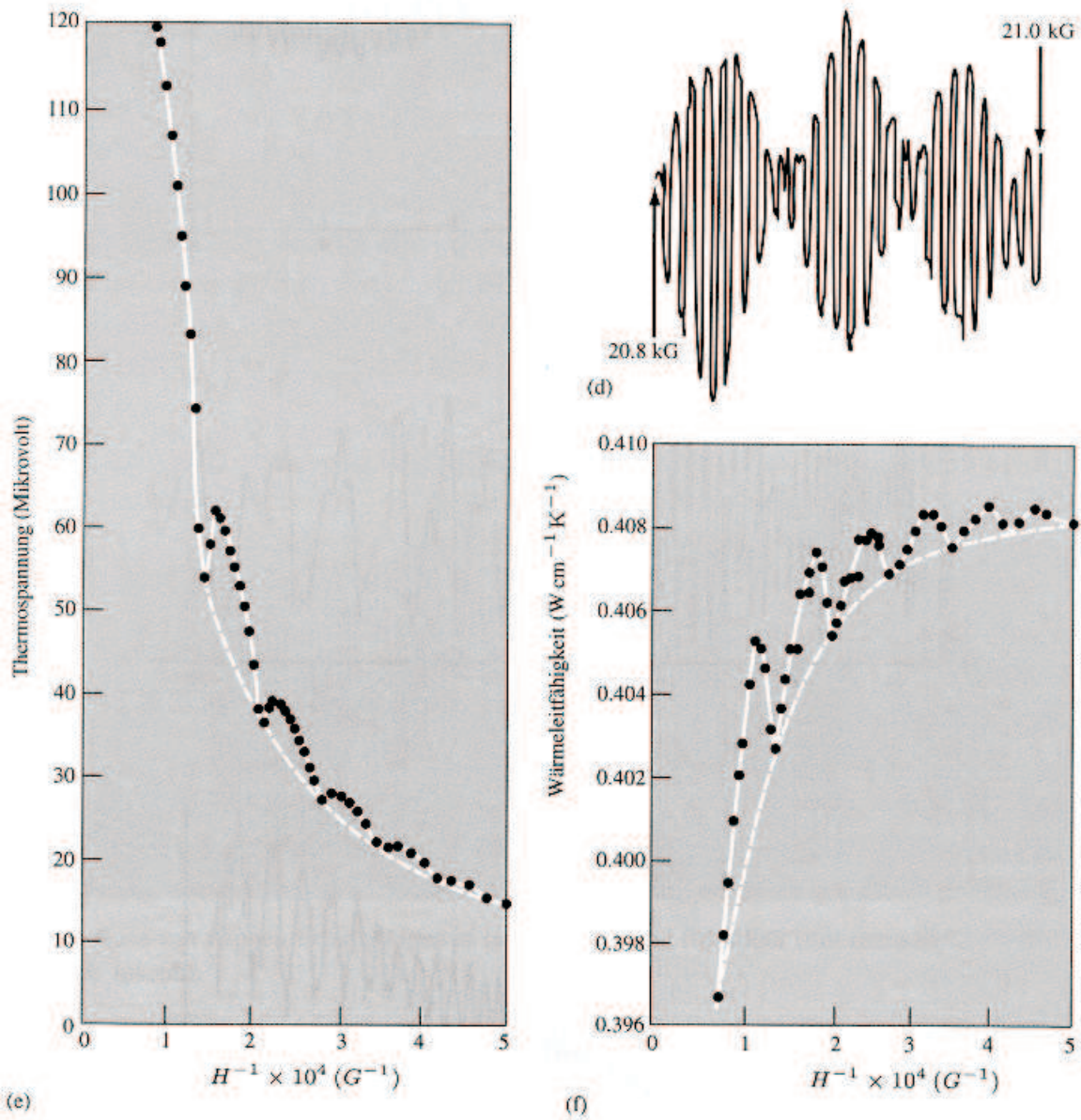


Abb. 2.32: (d) Oszillationen beim **Peltier-Effekt** in Zink, (e) **Thermospannung** von Wismut bei 1.6 K, (f) **Wärmeleitfähigkeit** von Wismut bei 1.6 K. [nach N.W. Ashcroft, N.D. Mermin *Festkörperphysik* (2001); Abb.14.3d-f].