

2.4 Magnetwiderstand

Gesucht:

Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit σ , bzw. des spezifischen Widerstands ρ vom externen Magnetfeld, also $\sigma(B) = 1/\rho(B)$

zu erwarten:

Erhöhung des elektrischen Widerstands \rightarrow **positiver Magnetwiderstand (MR)**¹

$$\Delta\rho = \rho(B) - \rho_0(B = 0) \quad (2.44)$$

Grund:

Aufspulen der e^- -Bahnen

\Rightarrow erhöhte Wahrscheinlichkeit für Streuprozesse

(bzgl. in Stromrichtung zurückgelegte Strecke)

bedeutet anschaulich eine Verkleinerung der effektiven freien Weglänge ℓ .

Anmerkung:

• **longitudinaler MR:** $B \parallel I$; ist typischerweise kleiner als **transversaler MR:** $B \perp I$

• **positiver MR** tritt immer auf;

ist aber evtl. von wesentlich größeren MR-Effekten überlagert.

• in speziellen Fällen auch $\Delta\rho < 0$ **negativer MR:**

- in **starken B-Feldern** aufgrund Änderung der Bandstruktur

- **spinabhängige Streuung**; insbes. in magnetischen Metallen \rightarrow [Kap. 5.6]

qualitative Betrachtung (für $\ell = const$):

Wir erwarten eine relative Zunahme des Widerstands gemäß

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = f\left(\frac{\ell}{r_c}\right)$$

also nur abhängig von mittlerer freier Weglänge ℓ und Zyklotronradius r_c .

Mit $\omega_c = eB/m_c \approx v_F/r_c$ gilt

$$r_c \approx \frac{v_F m_c}{eB} \quad (2.45)$$

mit $\ell \propto \sigma_0 = 1/\rho_0$ und $r_c \propto 1/B$ folgt

$$\frac{\ell}{r_c} \sim \frac{B}{\rho_0} \quad (2.46)$$

somit

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = F\left(\frac{B}{\rho_0}\right) \quad \text{Kohler-Regel} \quad (2.47)$$

F ist eine universelle Funktion, unabhängig von T ;

hängt nur von Material und Geometrie ab.

Aus (2.47) \Rightarrow : der positive MR kann sehr groß werden wenn ρ_0 sehr klein ist.

Ist bei sehr reinen Metallen bei sehr tiefen Temperaturen der Fall²:

$\rightarrow \Delta R/R$ bis zu +5% in reinem Cu, Ag bei ca. 10 T und 4.2 K.

¹aus dem engl. *magneto resistance*

²E. Fawcett, *Advances in Physics* **13**, 139 (1964).

schwache Magnetfelder: $\omega_c \tau \ll 1$

mit $\omega_c = eB/m_c$ und $\tau = \ell/v_F$ und mit der Beziehung (2.45) für den Zyklotronradius gilt

$$\omega_c \tau = \frac{eB}{m_c} \cdot \frac{\ell}{v_F} = \frac{\ell}{r_c}$$

d.h., die Bedingung für schwache Felder ist gleichbedeutend mit der Forderung $\ell \ll r_c$.

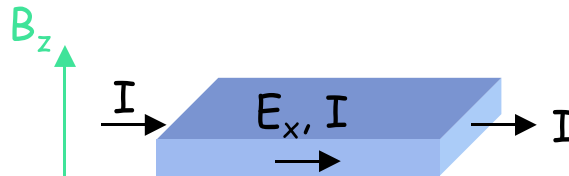
Aus Symmetriegründen (kein Vorzeichenwechsel mit Umkehr der \vec{B} -Feldrichtung) erwarten wir

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \propto B^2 \Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \approx \left(\frac{\ell}{r_c}\right)^2 = (\omega_c \tau)^2 \ll 1$$

(genauere Begründung s.u.)

Beobachtungen für starke Felder: $\omega_c \tau \gg 1$

Betrachte folgende Geometrie:



⇒ transversaler Magnetwiderstand

1. Fall: $R(B)$ steigt an und sättigt
für B in beliebigen Kristallrichtungen
gilt für Metalle mit geschlossener Fermi-Fläche
(z.B. für Na, Li, In, Al)
2. Fall: $R(B)$ wächst monoton
für B in beliebigen Kristallrichtungen
gilt für Metalle mit gleicher Zahl von Elektronen und Löchern
(sogenannte *kompensierte Metalle*; Bsp: Bi, Sb, W, Mo)
3. Fall: $R(B)$ sättigt in bestimmten Kristallrichtungen von B
+ wächst monoton in anderen Kristallrichtungen
⇒ starke Anisotropie des Magnetwiderstands!
Gilt für Metalle mit offenen Bahnen
(z.B. Edelmetalle, Mg, Zd, Cd, Sn, Pb, Pt)

quantitative Betrachtungen zur Dynamik der Ladungsträger im Magnetfeld

1. Ansatz: freie Elektronen

betrachte isotrope Fermi-Kugel

Für die Kraft auf ein Elektron gilt

$$\vec{F} = \hbar \frac{d\vec{k}}{dt} = m^* \frac{d\vec{v}}{dt}$$

d.h. die Kraft \vec{F} bewirkt eine Verschiebung der Fermi-Kugel im \vec{k} -Raum um

$$\delta\vec{k} = \frac{m^*}{\hbar} \delta\vec{v}$$

Berücksichtigung von Streuprozessen:

führen zur Relaxation der Fermi-Kugel in der Relaxationszeit τ

mit Kraft

$$\vec{F} = \hbar \frac{\delta\vec{k}}{\tau} = m^* \frac{\vec{v}}{\tau}$$

Im stationären Zustand ($\dot{\vec{v}} = 0$) stellt sich eine konstante Driftgeschwindigkeit \vec{v} ein, d.h. eine stationäre Verschiebung der Fermi-Kugel um $\delta\vec{k} = \frac{m^*}{\hbar} \delta\vec{v}$

Dann gilt die Bewegungsgleichung unter dem Einfluß eines elektrischen und magnetischen Feldes

$$\vec{v} = \frac{e\tau}{m^*} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.48)$$

Mit $\vec{B} = B\hat{e}_z$; Beweglichkeit $\mu = \frac{e\tau}{m^*}$; $\xi \equiv \mu B_z = \omega_c \tau$ folgt aus (2.48)

$$\Rightarrow v_x = \mu E_x + \xi v_y; \quad v_y = \mu E_y - \xi v_x; \quad v_z = \mu E_z$$

Durch Einsetzen

$$\begin{aligned} v_x &= \mu E_x + \mu \xi E_y - \xi^2 v_x; \\ v_y &= \mu E_y - \mu \xi E_x - \xi^2 v_y \end{aligned}$$

und Auflösen nach v_x bzw. v_y

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{1+\xi^2} (E_x + \xi E_y) \\ \frac{\mu}{1+\xi^2} (E_y - \xi E_x) \\ \mu E_z \end{pmatrix} = \frac{\mu}{1+\xi^2} \begin{pmatrix} (E_x + \xi E_y) \\ (E_y - \xi E_x) \\ (1 + \xi^2) E_z \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Leitfähigkeitstensor $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

mit Stromdichte $\vec{j} = ne\vec{v}$ folgt aus (2.49)

$$\vec{\sigma} = \frac{ne\mu}{1 + \xi^2} \begin{pmatrix} 1 & \xi & 0 \\ -\xi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \xi^2 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Damit gilt die Identität (Beziehung der irreversiblen Thermodynamik):

$$\sigma_{\mu\nu}(B) = \sigma_{\nu\mu}(-B)$$

Die Randbedingung für die betrachtete Geometrie ($I || \hat{e}_x$) lautet:

$$j_y = j_z = 0 \Leftrightarrow v_y = v_z = 0$$

Damit folgt aus (2.49)

$$E_y = \xi E_x \quad \text{Hall Feldstärke;} \quad \text{und} \quad E_z = 0$$

sowie

$$\Rightarrow j_x = \frac{ne\mu}{1 + \xi^2} (E_x + \xi E_y) = ne\mu E_x$$

Ergebnis:

Die longitudinale Leitfähigkeit ist unabhängig von B

→ **kein transversaler Magnetwiderstand** im Fall des freien Elektronengases

Grund:

Hall-Feld kompensiert B -Komponente der Lorentzkraft

könnte zumindest Sättigung des MR für alle B -Feldrichtungen erklären

(obwohl über Stärke von B und damit über $\omega_c\tau$ nichts vorausgesetzt wurde)

→ offensichtlich ist Verfeinerung des Modells erforderlich

Bisher vorausgesetzt:

- m^* und τ isotrop im \vec{k} -Raum

- nur eine Ladungsträgersorte

2. Ansatz: Berücksichtigung von Elektron- und Lochbahnen

nun Beschränkung auf hohe Felder ($\omega_c\tau \gg 1$)

2 Typen Ladungsträger: e^- und Löcher (aus Lochflächen)

\Rightarrow Kompensation der Lorentzkraft durch Hall-Feld

ist nicht gleichzeitig für beide Ladungsträgertypen möglich

Für Elektronen (1) und Löcher (2) gilt nach wie vor gemäß (2.48)

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \frac{e\tau_1}{m_1^*}(\vec{E} + \vec{v}_1 \times \vec{B}) \\ \vec{v}_2 &= -\frac{e\tau_2}{m_2^*}(\vec{E} + \vec{v}_2 \times \vec{B})\end{aligned}\quad (2.51)$$

Näherung: $\omega_{c1}\tau_1 \gg 1$, $\omega_{c2}\tau_2 \gg 1$ (starkes B -Feld)

für linke Terme in (2.51) \Rightarrow

$$\frac{e\tau_i}{m_i^*}\vec{v}_i \times B = \omega_{ci}\tau_i\vec{v}_i \times \hat{e}_B \gg \vec{v}_i \quad (i = 1, 2)$$

\rightarrow setze $\vec{v}_i = 0$ auf linker Seite in (2.51)

Mit $\vec{B} = B\hat{e}_z$:

\rightarrow x -Komponenten $E_x + B_z v_{1y} = 0$

$$E_x + B_z v_{2y} = 0$$

liefert y -Komponenten $v_{iy} = -E_x/B_z$ der Geschwindigkeiten und damit die Stromdichte in y -Richtung:

$$j_y = n_1 e v_{1y} - n_2 e v_{2y} = (n_2 - n_1) e \frac{E_x}{B_z}$$

analog für x -Komponenten $v_{ix} = E_y/B_z \rightarrow$ Stromdichte in x -Richtung:

$$j_x = (n_1 - n_2) e \frac{E_y}{B_z}$$

$$\Rightarrow \sigma_{yx} = (n_2 - n_1) \frac{e}{B_z}; \quad \sigma_{xy} = (n_1 - n_2) \frac{e}{B_z}$$

falls $n_1 = n_2$ ("kompensierte Metalle"):

$$\rightarrow \sigma_{yx} = \sigma_{xy} = 0$$

Damit bleibt aus (2.50) für die longitudinale Leitfähigkeit übrig (mit $n_1 = n_2 = n$ und $\xi_i^2 + 1 \approx \xi_i^2$ da $\xi_i = \omega_{ci}\tau_i \gg 1$)

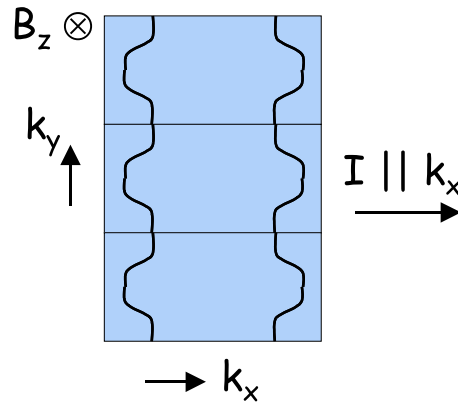
$$\sigma = \sigma_{xx} \approx \frac{ne\mu_1}{\xi_1^2} + \frac{ne\mu_2}{\xi_2^2} = \frac{ne}{B_z^2} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho \propto B^2}$$

\rightarrow keine Sättigung in $R(B)$ für kompensierte Metalle

3. Ansatz: Berücksichtigung offener Bahnen

a) Strom \perp offene Bahn



Wir betrachten wieder den Grenzfall starker Felder $\omega_c \tau = \xi \gg 1$

damit gilt auch wieder $1 + \xi^2 \approx \xi^2$

→ Leitfähigkeitstensor aus (2.50)

$$\vec{\sigma} \approx ne\mu \begin{pmatrix} \xi^{-2} & \xi^{-1} & 0 \\ -\xi^{-1} & \xi^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

noch ohne Berücksichtigung offener Bahnen

Beitrag durch offene Bahnen:

Für elektrischen Transport entlang der oben skizzierten offenen Bahnen verläuft die Hauptkomponente von \vec{v} in y -Richtung.

⇒ die offenen Bahnen liefern den überwiegenden Beitrag zu σ_{yy}

Wir definieren diesen als

$\sigma_{yy} = s \cdot ne\mu$, mit dem Parameter $s \gg \xi^{-2}$

$$\Rightarrow \vec{\sigma} \approx ne\mu \begin{pmatrix} \xi^{-2} & \xi^{-1} & 0 \\ -\xi^{-1} & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit der geometrischen Randbedingung $j_y = 0 = v_y$ folgt aus $\vec{j} = \vec{\sigma} \cdot \vec{E}$ für die y -Komponente

$$-\frac{E_x}{\xi} + sE_y \approx 0 \Leftrightarrow E_y \approx E_x/s\xi$$

und damit für die x -Komponente

$$j_x \approx ne\mu \left(\frac{E_x}{\xi^2} + \frac{E_y}{\xi} \right) = ne\mu \frac{E_x}{\xi^2} \left(1 + \frac{1}{s} \right)$$

Damit gilt für den longitudinalen Widerstand

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{\xi^2}{ne\mu} \cdot \frac{s}{s+1}$$

$$(\xi = \mu B; s \text{ unabhängig von } B)^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho \propto B^2}$$

→ **keine Sättigung für Strom \perp offene Bahn**

b) Strom \parallel offene Bahn (in k_x -Richtung)

nun liefern offene Bahnen überwiegenden Beitrag zu $\sigma_{xx} = sne\mu$ (mit $s \gg \xi^{-2}$)

$$\Rightarrow \vec{\sigma} \approx ne\mu \begin{pmatrix} s & \xi^{-1} & 0 \\ -\xi^{-1} & \xi^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Randbedingung $j_y = 0$ liefert nun für die y -Komponente

$$-E_x/\xi + E_y/\xi^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E_y \approx \xi E_x$$

und damit für die x -Komponente

$$j_x \approx ne\mu(sE_x + E_x) = neuE_x(s+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho \text{ unabhängig von } B}$$

→ **Sättigung für Strom \parallel offene Bahn**

(für schwache Felder $\omega_c\tau \ll 1$, läßt sich hier zeigen dass $\rho \propto B^2$)

Offene Bahnen führen also zu einem nicht-sättigenden Magnetwiderstand wenn der Stromtransport senkrecht zu den Bahnen verläuft.

Sättigung tritt auf bei Stromtransport entlang der Bahnen

Hier spiegelt der Magnetwiderstand deutlich die Anisotropie der Fermi-Fläche wieder.

³die Driftgeschwindigkeit v_y und damit σ_{yy} ist unabhängig von \vec{B} ; Das Magnetfeld beeinflusst nur die Rate \dot{k}_x mit der die offene Bahn im \vec{k} -Raum durchlaufen wird.