FA Analyse von Messunsicherheiten

1. Literatur

W. Walcher, Praktikum der Physik (2. Aufl.), Kap. 1 u. 2
W.H.H. Gränicher, Messung beendet - was nun?, B.G. Teubner Stuttgart 1994, Kap. 1-3,9
S. Brandt, Datenanalyse, BI Wissenschaftsverlag 1992
Deutsche Norm „Grundlagen der Messtechnik“ DIN 1319, Mai 1996, Beuth-Verlag
Wikipedia: Messabweichung, Normalverteilung, Studentsche t-Verteilung, Eichung, Ausreißer
Eichordnung EO 1988: `http://www.gesetze-im-internet.de/eo_1988/`
CASSY: `http://www.leybold-didactic.de`
Kurzanleitung zur Bedienung von CASSY ab Seite 209.

2. Motivation

Ziel des Praktikums ist es, neben dem Kennenlernen der Messtechnik und der Methodik des Messens auch Erfahrungen in der Bewertung von Messergebnissen zu sammeln. Zum Beispiel muss zur Prüfung der Gültigkeit eines theoretischen Modells die Qualität und Aussagekraft der Messung bekannt sein. Jede physikalische Messung unterliegt zufälligen Schwankungen und systematischen Abweichungen, die man im Begriff *Messfehler* (alte Bezeichnung) oder treffender *Messunsicherheit* (neu nach DIN 1319-3) zusammenfasst. Im Versuch soll an einem möglichst einfachen Experiment erlernt werden, welche Arten von Messunsicherheiten auftreten, wie sie zu bestimmen sind und wie sich die Unsicherheiten einzelner Messgrößen auf das Gesamtergebnis auswirken. Im Praktikum wird der kürzeren Bezeichnung wegen oft *Fehler* synonym zu *Messunsicherheit* verwandt. Da im allgemeinen Sprachgebrauch der Begriff *Fehler* jedoch meist mit „falsch“ assoziiert wird, jedoch die Messung einer physikalischen Größe keineswegs falsch sein muss, wenn sie einen (unvermeidbaren!) Messfehler besitzt, vermeidet man v.a. in der technischen Terminologie seit einigen Jahren diesen Begriff zugunsten von Messunsicherheit.

3. Fragen zur Vorbereitung

- Wie sind folgende Verteilungsfunktionen definiert? Wo treten sie auf? (je ein Beispiel)
  - Gleichverteilung (kontinuierlich und diskret)
  - Binomialverteilung
  - Gaußverteilung
  - Poissonverteilung
- Wie lautet der Zentrale Grenzwertsatz der Statistik?
- Was ist der Unterschied zwischen dem Messwert und dem wahren Wert? Wann existiert überhaupt ein wahrer Wert?

- Erklären Sie die Begriffe wahrer Wert, mittlerer Messwert, zufällige und systematische Messwertabweichung anhand des Treffermusters auf einer Schießscheibe.

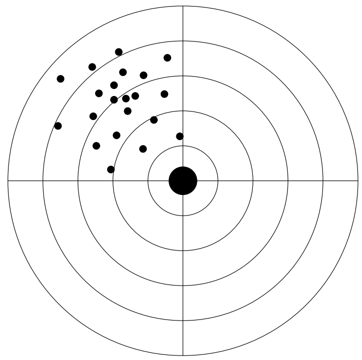

Abbildung FA.1: Treffermuster auf einer Schießscheibe

- Was ist der Unterschied zwischen Standardabweichung, Vertrauensintervall und Fehlerbereich?
- Wann spricht man von Eichung, wann von Kalibrierung eines Messgeräts?
- Wie wirken sich die Messwertabweichungen der Eingangsgrößen auf die Ausgangsgröße (Endergebnis) aus? Geben Sie die allgemeinen Berechnungsschemata an.
- Was ist ein Histogramm? Was ist die optimale Intervallbreite eines Histogramms?

4. Aufgabenstellung

Mit Hilfe eines Fadenpendels bestimme man die Schwerebeschleunigung g der Erde (Gymnasialdeutsch „Ortsfaktor“) aus Schwingungsdauer und Pendellänge.

Die Schwingungsdauer wird manuell mehrfach gestoppt, die Zeiten werden von einem PC erfasst. Die Länge des Fadens wird mit einem Gliedermaßstab (vulgo Zollstock) ermittelt.

Ziel des Versuches ist es, aus den gemessenen Größen g und insbesondere die Messabweichung Δg zu bestimmen und dabei die Methodik der sog. Fehlerrechnung kennen zu lernen und nicht die möglichst präzise Ermittlung von g.

5. Grundlagen

Ziel einer physikalischen Messung ist es, möglichst gut den sog. „wahren Wert“ einer physikalischen Größe zu ermitteln. In der Regel gibt es diesen wahren Wert aber gar nicht, da der zu ermittelnde Wert von zahlreichen Einflussgrößen abhängen kann (z.B. Temperatur, Luftfeuchtigkeit). Ein ideales Experiment zeichnet sich dann dadurch aus, dass es diese Einflüsse möglichst weitgehend ausschließt oder korrigiert. Letztlich besitzt die Messgröße meist quantenphysikalischen Charakter, d.h. sie stellt selber nur eine Wahrscheinlichkeitsdichte dar. Nur in seltenen Fällen existiert daher ein wahrer Wert.

Im Praktikum kann man aber davon ausgehen, dass die Ungenauigkeit des Messverfahrens größer ist als die Schwankungsbreite des wahren Wertes, so dass die Annahme seiner Existenz eine gute Näherung ist.

In unserem Versuch wollen wir nun unter Annahme der Näherung des Fadenpendels durch das mathematische Pendel (Punktmasse, masseloser und undehnbarer Faden) aus der Schwingungsdauer $\bar{t}$ und der Fadenlänge l die Fallbeschleunigung g ermitteln.

$$g = (2\pi)^2 \frac{l}{\bar{t}^2} \quad . \tag{FA.1}$$

5.1. Messwert und wahrer Wert

Messen heißt, mit einem Gerät und einem Verfahren Werte einer physikalischen Größe zu ermitteln, die dem wahren Wert möglichst nahe kommen. Dabei kann die Messung auch mit dem Computer simuliert sein.

Wegen der unvermeidlichen Messabweichungen kann eine Messung stets nur einen Schätzwert sowie die Unsicherheit dieses Schätzwertes liefern, nie den wahren Wert selber.

5.2. Statistische Schwankungen der Messwerte

Der Messvorgang unterliegt zahlreichen Einflüssen, so dass eine Wiederholung einer Messung in der Regel zu einem anderen Messwert führt. Aus diesem Grund ist die Kenntnis der Verteilungsfunktion der Messwerte x_i (welche vom Messverfahren abhängen) entscheidend für die Beurteilung der Qualität einer Messung. Alle diese Verteilungen $\varphi(x)$ lassen sich durch ihre Momente μ_k bezüglich eines konstanten Ursprungs A charakterisieren:

$$\mu_k(x, A) = E[(x - A)^k] \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$E[y]$ bezeichnet dabei den Erwartungswert einer Verteilungsfunktion y. Für den Spezialfall $A = 0$ ergeben sich dann die Momente $\bar{x}$, $\bar{x^2}$, $\bar{x^3}$ usw. Aus den Momenten abgeleitete wichtige Größen sind

$$\begin{aligned}
\text{Mittelwert :} \quad \mu &= \mu_1(x, 0) \\
\text{Varianz :} \quad \sigma &= \sqrt{\mu_2(x, \mu)} \\
\text{Schiefe :} \quad \gamma_1 &= \frac{\mu_3(x, \mu)}{\sigma^3} \\
\text{Exzess :} \quad \gamma_2 &= \frac{\mu_4(x, \mu)}{\sigma^4}
\end{aligned}$$

Nach dem Zentralen Grenzwertsatz der Statistik sind die Messwerte oft normalverteilt, d.h. sie gehorchen einer Gaußverteilung, die für unsere Zeitmessung folgende Form hat:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(\mu - t)^2}{2\sigma^2}\right) \quad . \tag{FA.2}$$

Die Parameter $\mu = E[\varphi(t)]$ und $\sigma = E[\varphi(t-\mu)^2]$ werden als Mittelwert und Standardabweichung *der Verteilung* bezeichnet und entsprechen den Momenten $\mu = \mu_1(t, 0)$ bzw. $\sigma = \mu_2(t, \mu)$. Die höheren Momente um $A = \mu$ verschwinden dann alle. Die kontinuierliche Verteilung ergibt sich allerdings erst für eine unendliche Anzahl n von Messwerten t_i , daher sind die besten Abschätzungen für μ und σ gesucht. Diese sind (Beweis!)

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i \quad \text{mit} \quad \lim_{n\to\infty} \bar{t} = \mu \tag{FA.3}$$

sowie die Standardabweichung *der Stichprobe*:

$$s_t = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2}{n-1}} \quad \text{mit} \quad \lim_{n\to\infty} s_t = \sigma \tag{FA.4}$$

Beachten Sie, dass sich die beiden Standardabweichungen um den Faktor $\sqrt{n/(n-1)}$, die sog. Besselkorrektur, unterscheiden. Durch die Berechnung des Mittelwertes aus der Stichprobe sinkt die Zahl der verbleibenden Freiheitsgrade um eins, was man sich für $n = 2$ leicht plausibel machen kann.

Die Größe s_t wird auch als Standardabweichung des *Einzelwerts* bezeichnet, da jeder gemessene Wert der gleichen Verteilungsfunktion unterliegt.

Die Standardabweichung *des Mittelwerts* $s_{\bar{t}}$ ergibt sich aus folgender Beziehung:

$$s_{\bar{t}} = \frac{s_t}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i - \mu)^2}{n(n-1)}} \tag{FA.5}$$

Mit dieser Größe ist die statistische Unsicherheit des Messergebnisses eigentlich hinreichend charakterisiert. Meist interessiert in der Praxis aber auch noch der sog. Vertrauensbereich, in dem ein vorgegebener Anteil $1 - \alpha$ der Messwerte liegt. Die Größe α beschreibt also die Irrtumswahrscheinlichkeit, d.h. mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Messwert zufällig nicht im angegebenen Intervall liegt. Im Praktikum wird $\alpha = 0.05$ angenommen, also ein Vertrauensniveau von 95 %. Bei der Veröffentlichung wissenschaftlicher Ergebnisse wird jedoch meist ein $\alpha = 0.02 \ldots 0.001$ verwendet, bevor ein Ergebnis als signifikant angesehen wird. Standardabweichung und Vertrauensintervall hängen wie folgt zusammen:

$$\Delta t_{\text{zuf}} = F_s(\alpha, n) \cdot s_{\bar{t}} \tag{FA.6}$$

Der vom Vertrauensniveau und der Zahl der Messwerte abhängige sog. Student-Faktor F_s ergibt sich aus der Studentschen t-Verteilung, für große n und $\alpha = 0.05$ ist $F_s(0.05, \infty) =$

$1.96 \approx 2$. Nur für $n < 10$ und/oder andere Werte von α ist es notwendig, den Student-Faktor in entsprechenden Tabellen nachzuschlagen. Damit gilt im Praktikum meist die Beziehung:

$$\Delta \bar{x} = \frac{2 s_x}{\sqrt{n}} \tag{FA.7}$$

Dies wird unter Physikern als zufälliger (oder statistischer) *Fehler des Mittelwerts* bezeichnet, die DIN hält dafür keinen eigenen Begriff bereit.

5.3. Systematische Messwertabweichungen

Der Mittelwert aller Messwerte $\bar{t}$ konvergiert zwar gegen μ, nur entspricht dies i.a. nicht dem wahren Wert. Die Differenz wird als *systematische Messwertabweichung* bezeichnet. Solche Abweichungen sind nur durch vergleichende Messungen mit anderen Apparaturen oder Messmethoden ermittelbar. Dadurch sind sie prinzipiell korrigierbar, was von Herstellerseite durch eine entsprechende Kalibrierung auch meist geschieht. Falls der Aufwand nicht gerechtfertigt ist, begnügt man sich mit der Angabe der Fehlergrenzen. Ist die Kalibrierung amtlich (z.B. bei Handelswaagen), so nennt man dies Eichung. Eichen dürfen nur die zuständigen Eichämter, in Deutschland ist die oberste Eichbehörde die Physikalisch-Technische Bundesanstalt mit Sitz in Braunschweig und Berlin. Sagen Sie daher nie „Eichung“, wenn Sie „Kalibrierung“ meinen!

Für die indirekte Messung der Fallbeschleunigung g ist als Messgröße neben der Schwingungsdauer $\bar{t}$ auch die Fadenlänge l zu bestimmen. Vom Praktikanten ist l mit Hilfe eines Gliedermaßstabes („Zollstock“) zu messen. Überlegen Sie sich vorher, auf welche Stelle des Pendelkörpers Sie die Längenmessung beziehen!

Als allgemeine Regel für nicht geeichte Geräte gilt, dass der systematische Fehler die Hälfte der kleinsten Ableseeinheit plus 0.5 Promille des Ablesewertes beträgt, sofern der Hersteller nichts anderes angibt. Weitere Eichfehlergrenzen sind in der Eichordnung EO 1988 zu finden.

5.4. Fortpflanzung von Messwertabweichungen

Die Messwertabweichungen Δt und Δl pflanzen sich bei der Berechnung der Ergebnisgröße g fort und wirken sich als Unsicherheit oder Fehler des Ergebnisses aus. Bei der Bestimmung der Unsicherheit Δg_{sys} und Δg_{zuf} muss man die unterschiedliche Fortpflanzung systematischer und zufälliger Messwertabweichungen beachten.

Der *zufällige* Unsicherheit ergibt sich aus dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$|\Delta g_{\mathrm{zuf}}| = \sqrt{\left(\frac{\delta g}{\delta t} \Delta t_{\mathrm{zuf}}\right)^2 + \left(\frac{\delta g}{\delta l} \Delta l_{\mathrm{zuf}}\right)^2} \tag{FA.8}$$

Die Auswirkung *systematischer* Messwertabweichungen der unabhängigen Größen t und l bei kleinen Änderungen Δt_{sys} und Δl_{sys} kann man durch eine Taylorentwicklung erster

Ordnung abschätzen:

$$g(t+\Delta t_{\text{sys}}, l+\Delta l_{\text{sys}}) = g(t,l) + \frac{\delta g}{\delta t}\cdot\Delta t_{\text{sys}} + \frac{\delta g}{\delta l}\cdot\Delta l_{\text{sys}} + \ldots \tag{FA.9}$$

Damit erhält man den Betrag der systematischen Messunsicherheit:

$$|\Delta g_{\text{sys}}| = \left|\frac{\delta g}{\delta t}\cdot\Delta t_{\text{sys}}\right| + \left|\frac{\delta g}{\delta l}\cdot\Delta l_{\text{sys}}\right| \tag{FA.10}$$

Für Funktionen der Form $f=\alpha x^\beta y^\gamma$ (x und y sind die fehlerbehafteten unabhängigen Messgrößen, α, β und γ sind reelle Konstanten) empfiehlt sich das Verfahren der logarithmischen Differentiation, was das wesentlich übersichtlichere Rechnen mit relativen Unsicherheiten erlaubt:

$$\begin{aligned} d(\ln f) &= d(\ln\alpha) + \beta\cdot d(\ln x) + \gamma\cdot d(\ln y) \\ \frac{df}{f} &= 0 + \beta\frac{dx}{x} + \gamma\frac{dy}{y} \\ \left|\frac{\Delta f}{f}\right| &= \left|\beta\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\gamma\frac{\Delta y}{y}\right| \end{aligned}$$

Dies gilt für die relative systematische Unsicherheit. Analog gilt für die relative zufällige Unsicherheit:

$$\left|\frac{\Delta f}{f}\right|^2_{\text{zuf}} = \left|\beta\frac{\Delta x}{x}\right|^2 + \left|\gamma\frac{\Delta y}{y}\right|^2$$

Wie lauten die entsprechenden Ausdrücke für die Unsicherheiten von g?

Systematische und zufällige Unsicherheit sind getrennt anzugeben, z.B.

$$t = 3.2\,\text{s} \;\pm 0.2\,\text{s}\;(syst.)\;\pm 0.1\,\text{s}\;(zuf.)$$

Oft findet man jedoch in der Praxis eine summarische Angabe der Gesamtunsicherheit.

5.5. Grobe Messfehler

Es gehört zu den Grundprinzipien wissenschaftlichen Arbeitens, unerwartete oder missliebige Messwerte nicht zu unterdrücken. Vielmehr muss nach den Ursachen dieser „Ausreißer“ gesucht werden, u.U. verbirgt sich ja darin neue Physik. Im Praktikum ist jedoch meist ein defektes Messgerät, falsches Ablesen einer Anzeige, Schreib- oder Tippfehler bei der Protokollierung o.ä. die Ursache. Nur bei solch offensichtlichen groben Fehlern ist es gestattet, die unsinnig stark abweichenden Werte in der Auswertung unberücksichtigt zu lassen, dies ist allerdings im Protokoll zu vermerken.

6. Versuchsdurchführung

Man messe ca. 200 mal die Schwingungsdauer eines an der Decke hängenden Pendels. Für die Zeitmessung wird das System CASSY-Lab der Firma Leybold Didactic verwendet.

6.1. Aufbau des Experiments

Durch das Drücken eines Tasters zwischen zwei Nulldurchgängen der Pendelschwingung können n unabhängige Messwerte der Halbschwingungsdauer $T/2$ ermittelt werden. Jeweils zwei Taster mit grünem bzw. rotem Kabel können an die entsprechende Box (Pendelversuch Nr. 7077) angeschlossen werden, welcher seinerseits an die Eingänge A oder B eines Sensor-CASSY-Moduls angeschlossen ist. Über ein USB-Kabel wird CASSY an einen PC angeschlossen, so dass je CASSY/PC-Kombination mit bis zu vier Tastern gleichzeitig gemessen werden kann. Notebooks stehen im Praktikum zur Verfügung, Sie können aber auch Ihr eigenes Notebook verwenden, sofern die CASSY-Software darauf installiert ist. Melden Sie sich unter „Praktikum“ an und starten Sie das Programm „CASSYLab“.

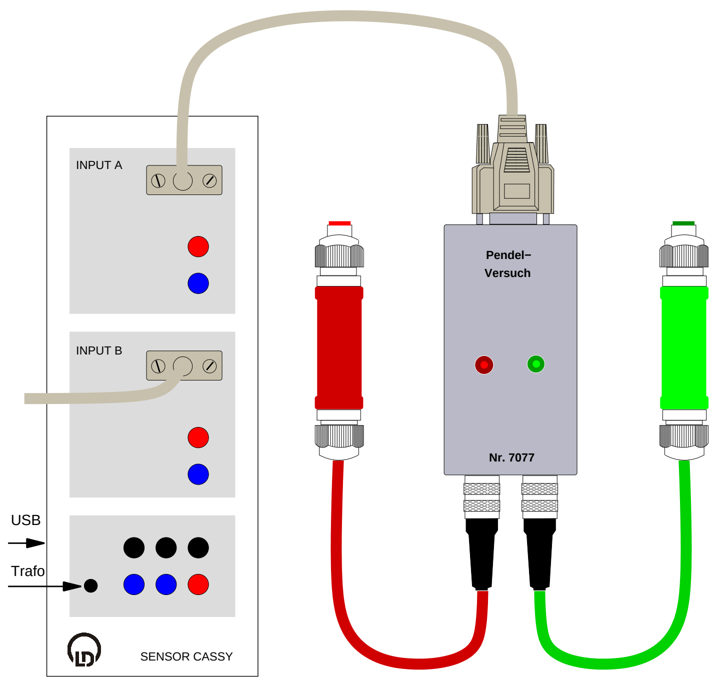

Abbildung FA.2: Anschluss der Taster an das CASSY-System

6.2. Durchführung einer Messung mit CASSY

Die Zeitdauern der Tastendrucke werden CASSY-intern als „Dunkelzeiten“ $tE_{\mathrm{A1}}, tF_{\mathrm{A1}}, tE_{\mathrm{B1}}$ und tF_{B1} bezeichnet, dabei beziehen sich die Bezeichnungen E und F auf den grünen bzw. roten Taster, die Indizes A und B auf die jeweiligen Eingänge von CASSY. Der Index 1 bezieht sich auf die Nummer des CASSY-Moduls und ist hier bedeutungslos. In vier kleinen Fenstern auf dem Bildschirm werden die Messzeiten angezeigt. Nach Betätigung der Taste F9 (Start der Messung) werden alle Messwerte aufgezeichnet und erscheinen sowohl in einer Tabelle als grafisch als Histogramm auf dem Bildschirm. Die Tabelle enthält neben der fortlaufenden Zeit seit dem Start der Messung (erste Spalte) die gemessenen Halbschwingungsdauern in ms (Spalten 2 – 5). Jede Messung mit einem der 4 Taster erzeugt daher eine neue Zeile in der Messtabelle.

Während der Messung wird ein Histogramm dargestellt, in dem alle Messwerte akkumuliert werden. Um die Messplätze unterscheiden zu können, wurde ein Offset von jeweils 2 Sekunden zwischen den Kanälen definiert. Schauen Sie sich zunächst die Definitionen der abgeleiteten Größen und Darstellungen an (Taste F5). Üben Sie zunächst mit kurzen Messserien, um mit CASSY vertraut zu werden. Weitere Erläuterungen gibt der Assistent vor Ort.

6.3. Messaufgaben

Führen Sie eine längere Messserie von ca. 10 bis 15 min Dauer durch, in der ca. 200 – 300 Messpunkte pro Pendel aufgenommen werden. Eine Abstimmung zwischen den Teilgruppen ist daher unbedingt nötig. Speichern Sie das Ergebnis sofort nach Ende der Messung ab! Kopieren Sie das Ergebnis auf einen mitgebrachten USB-Stick oder schicken Sie es sich als E-Mail zu! Verwenden Sie das CASSY-eigene lab-Format, damit Sie die Ergebnisse problemlos zu Hause weiter verarbeiten können.

Messen Sie die Länge des Pendels. Auf welchen Punkt des Pendelkörpers muss sich die Längenmessung beziehen, um die sog. reduzierte Pendellänge des hier vorliegenden physikalischen Pendels zu ermitteln?

7. Auswertung

Eine erste Auswertung der Ergebnisse können Sie mit CASSY gleich vor Ort durchführen. Mit Hilfe von CASSY kann man die Parameter der Messwertverteilung bestimmen: Wählen Sie die Darstellung des Histogramm, halten Sie dann die rechte Maustaste gedrückt und wählen Sie Weitere Auswertungen ▶ Gaußverteilung berechnen. Anschließend markieren Sie mit der linken Maustaste den interessierenden Teil des Histogramms, der während der Auswahl hellblau eingerahmt wird. Nach Loslassen der Maustaste erscheinen links unten in der Statuszeile die Anzahl der Messwerte n sowie die Parameter μ und σ der Gaußverteilung.

Bei der Auswertung zu Hause können Sie die Software Ihrer Wahl verwenden, die Daten lassen sich aus CASSYLab mit rechte Maustaste → Tabelle kopieren in die Zwischenablage kopieren und von dort in andere Anwendungen (z.B. Excel, Origin o.ä.) einfügen. Beschreibungen der Auswertung mit verschiedenen Programmen werden wir auf der Anleitungsseite im WWW sammeln.

Ihr Protokoll sollte folgendes enthalten:

1. Erstellen Sie Histogramme für n = 10, 25, 50, 100, 200 (bzw. aller) Messpunkte.

2. Schätzen Sie jeweils für n = 10, 25, 50, 100, 200 Messpunkte die Standardabweichung s_t, den Mittelwert $\bar{t}$ sowie den Fehler des Mittelwertes $\Delta\bar{t}$ entsprechend den Gln. FA.3–FA.8 ab.

3. Berechnen Sie aus dem mit allen Werten eines Messplatzes gewonnenen Mittelwert $\bar{t}$ die Erdbeschleunigung g. Berechnen Sie Δg unter Benutzung der Messfehler von l und t und wie in Gln. FA.8–FA.10 angegeben. Die Firma Leybold Didactic gibt für die Zeitauflösung von CASSY $0.25\,\mu s$ an. Die systematische Messabweichung des „Zollstocks“ beträgt $\Delta l_{\text{sys}} = 0.5\,\text{mm} + 5 \cdot 10^{-4} l$, der zufällige Fehler Δl_{zuf} ist aus der Ablesegenauigkeit abzuschätzen. Achten Sie auf die unterschiedliche Berechnung und getrennte Angabe von systematischem und zufälligem Fehler.

4. Von einer sinnvollen Zahl von Messwiederholungen spricht man dann, wenn die zufällige Unsicherheit des Endergebnisses etwa gleich der systematischen Unsicherheit ist. War das mit Ihrer Messung der Fall? Wenn nein, was wäre eine sinnvolle Zahl n gewesen?

8. Fragen zur Versuchsdurchführung

- Was ist ein mathematisches Pendel? Geben Sie die Bewegungsgleichung an und berechnen Sie die Schwingungsdauer! Zeigen sie quantitativ, welchen Einfluss die endliche Ausdehnung des Pendelkörpers auf die Schwingungsdauer hat.

- Warum wird bei diesem Experiment die Bestimmung der Schwingungsdauer am Nulldurchgang der Schwingung durchgeführt und nicht am Umkehrpunkt? Wann ist es, abhängig von der gemessenen Schwingungsdauer, zum Erreichen kleiner zufälliger Messabweichungen günstiger, im Umkehrpunkt oder im Nulldurchgang zu stoppen?

- Aus welchem Grunde sollten die Messungen der Schwingungsdauer einer Messreihe nur von einem Praktikanten vorgenommen werden?

- Wie groß sollte man die Intervallbreite des Histogramms ungefähr wählen, wenn sich bei den Messungen der Schwingungsdauer $(n = 200)$ eine Standardabweichung von $s_t = 0,2$ s ergeben hat?

- Ändert sich die Breite des Histogramms mit zunehmendem n?

- Wie ändert sich der zufällige Fehler, wenn man die Schwingungsdauer statt aus der Messung von 200 mal einer Schwingungsdauer aus der einmaligen Messung der Dauer von 200 Schwingungen ermittelt?

- Was lässt sich über die Messunsicherheit sagen, wenn bei wiederholten Messungen jedesmal der gleiche Wert ermittelt wird? Hat der Assistent Recht, wenn er auf einer weiteren Messung nach z.B. fünf identischen Messwerten besteht?

9. Beispiel für ein Histogramm

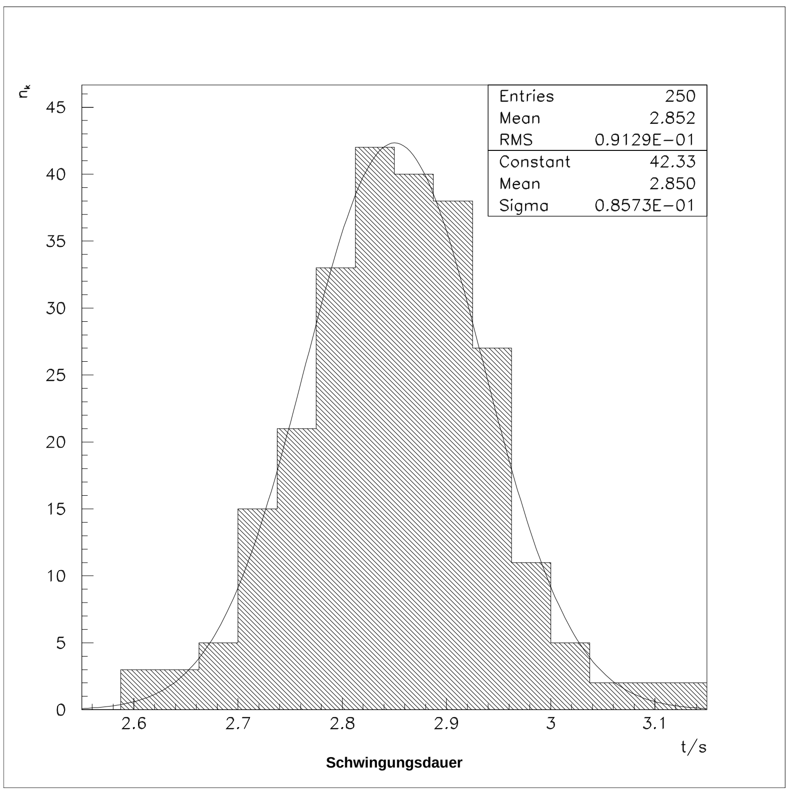

Abbildung FA.3: Beispiel eines Häufigkeits-Histogramms für $n = 250$ Messwerte.

Das Histogramm stellt die Häufigkeitsverteilung von 250 Messwerten dar. In der Legende sind angegeben: Zahl der Messwerte n (Entries), Mittelwert $\bar{t}$ (Mean), Varianz $\sqrt{\overline{t^2} - \bar{t}^2} = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot s_t$ (RMS, root mean square deviation). Angepasst wurde eine Gaußfunktion $n_k(t) = n_0 \cdot exp(-\frac{(t-\bar{t})^2}{2s_t^2})$. Die Größen Constant, Mean und Sigma entsprechen dabei n_0, $\bar{t}$ bzw. s_t.