LK Lorentzkraft

1. Problem

In diesem Versuch lernen Sie die Kraftwirkung eines $\vec{B}$-Feldes auf eine bewegte Ladung kennen. Dies untersuchen sie an zwei Beispielen: Zunächst untersuchen sie die Auslenkung eines Elektronenstrahls in einem Helmholtzspulenpaar. Im zweiten Versuchsteil messen sie mit Hilfe einer Waage die Kraft eines $\vec{B}$-Feldes auf einen stromdurchflossenen Leiter.

2. Vorbereitung

Stichworte: Strom, Stromdichte; Erzeugung von Magnetfeldern (Magnetfeld eines geraden Leiters, Magnetfeld einer Spule, Helmholtzspulen, Gesetz von Biot-Savart); Kraftwirkung eines $\vec{B}$-Feldes auf eine bewegte Ladung (Lorentz-Kraft);

Literatur:
Demtröder II Kapitel 3.3 „Kräfte auf bewegte Ladungen in Magnetfeldern“

Fragen:

- Wie sieht das Magnetfeld eines Leiters aus? Was passiert, wenn man ihn zu einer Schlaufe biegt / eine Spule wickelt?
- Wie berechnet man allgemein das Magnetfeld eines Leiters?
- Was macht ein Elektron, das durch ein homogenes Magnetfeld fliegt? (Warum?)
- Leiten sie die Gleichung LK.4 aus der Lorentz-Kraft her.
- Welche weiteren Effekte kennen Sie, bei denen die Lorentzkraft eine Rolle spielt?

3. Einführung / Aufbau

3.1. Elektronenstrahl im Magnetfeld

Im ersten Teil dieses Versuchs wird ein Elektronenstrahl im homogenen Magnetfeld untersucht.

Der Elektronenstrahl wird an einer Glühkathode erzeugt. Die austretenden Elekronen werden durch einen Wehneltzylinder fokussiert und bis zu einer durchbohrten Anode beschleunigt. Die Geschwindigkeit der so beschleunigten Elektronen ergibt sich aus der Beschleunigungsspannung U:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU \tag{LK.1}$$

In dem $\vec{B}$-Feld der Spulen wirkt auf die Elektronen die Lorentzkraft

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \tag{LK.2}$$

Da die Bahn der Elektronen von vornherein senkrecht zum $\vec{B}$-Feld ist, werden sie durch die Lorentzkraft, die wiederum senkrecht zum Feld und zur Flugrichtung der Elektronen angreift, auf eine Kreisbahn gebracht. Der Radius der Kreisbahn ergibt sich aus der Bedingung, dass die Lorentzkraft gleich stark ist wie die Zentrifugalkraft ($F = \frac{mv^2}{r}$). Setzt man diese beiden Kräfte gleich, so kann man die entstehende Gleichung nach e/m auflösen. So kann man durch Messen des Radius das Verhältnis der Ladung der Elektronen zu deren Masse bestimmen.

In der Mittelebene zwischen den Spulen herrscht in guter Näherung ein homogenes Feld:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot 1,43 \frac{N}{D} \cdot I_{\mathrm{Spule}} \tag{LK.3}$$

Dabei ist $N = 130$ Die Windungszahl der Spule und $D = 0,3\,\mathrm{m}$ der Spulendurchmesser.

3.2. Leiter im Magnetfeld

Um die Kraftwirkung eines Magetfeldes auf bewegte Ladung zu Messen, benötigt man zunächst ein Magnetfeld. In diesem Versuch wird es durch eine Spule erzeugt, die in der

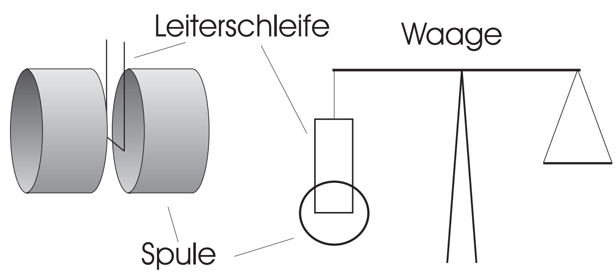

Abbildung LK.1: Aufbau: Links die Spule mit der Leiterschleife; Rechts: Skizze von vorne.

Mitte einen Spalt hat. In diesem Spalt ist ein Leiter angebracht (s. Abb. LK.1). Damit die Kraftwirkung groß genug ist, handelt es sich bei dem Leiter um eine Spule mit 40 Wicklungen. Diese Tauchspule hängt an einer Balkenwaage.

Bringt man einen geraden stromdurchflossenen Leiter in ein $\vec{B}$-Feld, so wirkt eine Kraft $\vec{F}_{\mathrm{L}}$ auf diesen Draht. Sie hängt ab von dem Strom I_{L} im Leiter, von seiner Länge L_{L} und von seiner Richtung $\vec{n}$:

$$\vec{F} = L_{\mathrm{L}} \cdot I_{\mathrm{L}} \cdot \vec{n} \times \vec{B} \tag{LK.4}$$

Eine Zylinderspule erzeugt in ihrem Inneren ein einigermaßen homogenes Magnetfeld $\vec{H}$. Es hängt ab von der Gesamtlänge L_{Sp}, von dem Radius r, von der Windungszahl N und vom Strom in der Spule I_{Sp}:

$$\vec{H} = \frac{I_{\mathrm{Sp}} \cdot N}{\sqrt{L_{\mathrm{Sp}}^2 + 4r^2}} \tag{LK.5}$$

Bei einer Spule mit Spalt a ergibt sich die etwas kompliziertere Beziehung

$$\vec{H} = \frac{I_{\mathrm{Sp}} \cdot N}{L_{\mathrm{Sp}}} \cdot \left(\frac{L_{\mathrm{Sp}} + a}{\sqrt{(L_{\mathrm{Sp}} + a)^2 + 4r^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4r^2}} \right) \quad . \tag{LK.6}$$

Die in diesem Versuch benutzen Spulen haben eine Länge von $L_{\mathrm{Sp}} = 0,4\,\mathrm{m}$ und einen Radius von $r = 5,3\,\mathrm{cm}$. Die Länge des eintauchenden Leiterstücks ist ebenfalls 5,3 cm.

4. Aufgaben

1. Elektronenstrahl: Bestimmen sie den Radius der Flugbahn der Elektronen bei verschiedenen Werten für den Spulenstrom und die Beschleunigungsspanung.

2. Leiterschleife:

   (a) Zunächst soll die Abhängigkeit der Kraft von dem Strom im Leiter bestimmt werden. Halten Sie dazu den Strom in der Spule I_{Sp} und der Abstand zwischen den beiden Spulen ($a = 1\,\mathrm{cm}$) konstant. Bestimmen Sie für jede Masse $M = 100\,\mathrm{mg}$, $M = 200\,\mathrm{mg}$,..., $M = 1000\,\mathrm{mg}$ den Strom im Leiter I_{L}, der nötig ist, um die Waage ins Gleichgewicht zu bringen.

   (b) Jetzt wird die Abhängigkeit von $\vec{B}$ bestimmt. Der Spalt zwischen den Spulen bleibt dabei wieder konstant. Auch der Strom im Leiter I_{L} wird konstant gehalten. Gleichen Sie diesesmal die Gewichtskraft der aufgelegten Massen durch den Strom in der Spule aus.

   (c) Nicht nur der Strom in der Spule, auch der Abstand der Spulen zueinander hat einen Einfluss auf das $\vec{B}$-Feld zwischen den Spulen. Um dies auszumessen wird nun der Abstand zwischen den Spulen variiert (1 cm bis 4 cm in 1cm Schritten). Der Strom in den Spulen I_{Sp} bleibt dabei konstant. Messen Sie den Strom im Leiter I_{L}, der nötig ist, um die Waage bei den verschiedenen Spaltbreiten im Gleichgewicht zu halten.

5. Auswertung

1. Elektronenstrahl: Berechnen sie $\frac{e}{m}$ für Elektronen (Fehlerrechnung und Vergleich mit Literaturwert nicht vergessen)

2. Leiterschleife: Zeichnen sie zunächst ein Diagramm mit der gemessenen Kraft in Abhängigkeit des angelegten Stromes in der Tauchspule. Die Steigung der Ausgleichsgeraden soll mit einem berechneten Wert verglichen werden. Dasselbe wiederholen sie mit einem Diagramm der Kraft in Abhängigkeit des $\vec{B}$-Feldes. Diskutieren sie dabei auch ihre Messunsicherheiten und schätzen sie den Größtfehler ab. Können sie im Rahmen ihrer Fehler das Lorentzsche Gesetz bestätigen?

3. Berechnen sie $\vec{B}$ zunächst aus dem Strom in der Tauchspule und anschließend aus den Daten für die Feldspule (Strom und Spaltgröße). Tragen sie beide Werte in Abhängigkeit von der Spaltgröße in dasselbe Diagramm. Diskutieren sie das Ergebnis.

6. Anhang: Das magnetische Feld eines Helmholtz-Spulenpaares

Im Versuch wird ein Helmholtz-Spulenpaar zur Erzeugung des Magnetfeldes verwendet. So kann man auf eine direkte Messung von B verzichten, da das Magnetfeld aus dem Spulenstrom, der Windungszahl und der Spulengeometrie berechnet werden kann.

Ein Helmholtz-Spulenpaar besteht aus zwei kurzen, dünnen Spulen mit gleicher Windungszahl n und mit gleichem Radius R, die mit gleicher Achse im Abstand $2a = R$ voneinander aufgestellt sind und vom Strom I durchflossen werden (Abbildung LK.2). „Kurz“ bedeutet, dass die Wicklungslänge klein gegen den Radius R ist, und „dünn“, dass die Wicklungsdicke klein gegen R ist.

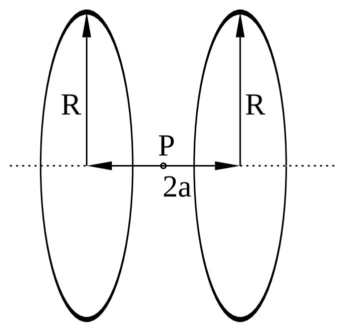

Abbildung LK.2: Geometrie eines Helmholtz-Spulenpaares

Um Betrag und Richtung der magnetischen Induktion B im Zentrum der Anordnung (Punkt P in Abbildung LK.2) zu berechnen, berechnet man zunächst nach dem Gesetz von Biot und Savart das Feld eines Kreisstroms mit dem Radius R und der Stromstärke I auf der Symmetrieachse im Abstand a von der Kreisebene (Abbildung LK.3).

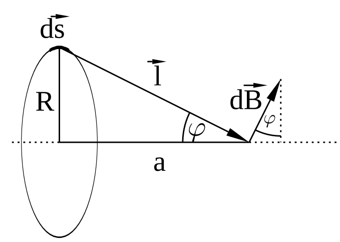

Abbildung LK.3: Berechnung des Magnetfelds eines Helmholtz-Spulenpaares

Das Stromelement $d\vec{s}$ ruft nach Biot und Savart im Punkt P die magnetische Induktion

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{l^2}\left(d\mathbf{s} \times \frac{\mathbf{l}}{l}\right) \qquad \text{(LK.7)}$$

hervor. Dabei ist $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} = 1.25664 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$ die magnetische Feldkonstante und $\vec{l}$ der Abstandsvektor zwischen dem Stromelement und dem Punkt P, an dem das Feld berechnet werden soll.

Ähnlich wie die elektrische Feldstärke beim Coulombschen Gesetz nimmt die magnetische Induktion für ein Stromelement quadratisch mit dem Abstand ab. Sie ist proportional zur Stromstärke, ähnlich wie die elektrische Feldstärke zur erzeugenden Ladung proportional ist. Ähnlich wie bei der Lorentzkraft steht die magnetische Induktion senkrecht auf der Fläche, die von dem Stromelement $d\vec{s}$ und dem Abstandsvektor $\vec{l}$ aufgespannt wird.

Um die gesamte magnetische Induktion zu berechnen, müssen die Beiträge aller Stromelemente summiert (integriert) werden. Zerlegt man zunächst den Anteil $d\vec{B}$ in je eine Komponente senkrecht und parallel zur Symmetrieachse (x-Achse), so erkennt man, dass sich die senkrechten Komponenten gegenseitig auslöschen, während sich die parallelen Komponenten addieren. Für die Komponente parallel zur x-Achse ergibt sich nach Gleichung LK.7 und Abbildung LK.3

$$dB_{||} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{l^2} ds \sin\varphi \;\; ; \quad \sin\varphi = \frac{R}{l} = \frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}$$

und damit für das Magnetfeld

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{l^2}\sin\varphi \int_0^{2\pi R} ds = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{(R^2+a^2)}\frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}} 2\pi R = \frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{(R^2+a^2)^{3/2}} \;\; .$$

Um die magnetische Induktion auf einem Achsenpunkt in der Mitte zwischen den beiden Spulen eines Helmholtzspulenpaares zu bekommen, muss die nach dieser Gleichung berechnete Induktion nur noch mit der Windungszahl n jeder der beiden Spulen und außerdem, weil beide Spulen beitragen, mit einem Faktor 2 multipliziert werden. Der Radius R stellt nun den mittleren Radius der Spulen dar, und a bedeutet nun die Hälfte des mittleren Abstandes der beiden Spulen. Die magnetische Induktion in der Mitte zwischen den beiden Spulen hat damit den Betrag

$$B = \frac{\mu_0\, n\, R^2\, I}{(R^2+a^2)^{3/2}} \;\; , \tag{LK.8}$$

und die Richtung von $\vec{B}$ ist parallel zur Symmetrieachse.