

MR Mechanische Resonanz

1. Fragen zur Vorbereitung

- Geben Sie für folgende Schwingungsarten (z.B. Masse an einer Feder) die Bewegungsgleichung an: freie ungedämpfte, freie gedämpfte und erzwungene Schwingung (mit und ohne Dämpfung).
- Nennen Sie die jeweiligen Eigenfrequenzen!
- Welche Lösungen gibt es abhängig von der Dämpfung für die freie gedämpfte Schwingung?
- Was versteht man unter dem logarithmischen Dekrement?
- Was ist die Güte eines schwingfähigen Systems?
- Charakterisieren sie Einschwingvorgang, Schwebungen und stationäre Schwingung.
- Wie funktioniert eine Wirbelstrombremse?

2. Versuchsaufbau

Freie und erzwungene Schwingungen werden an einem Federpendel mit geringer Reibung untersucht. Es besteht aus einem Gleiter auf einer Luftkissenbahn, der durch zwei Schraubenfedern an eine Ruhelage gebunden ist (Abbildung MR.1). Eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung (siehe Gleichung MR.4) wird durch eine Wirbelstrombremse erreicht. Die Wirbelstrombremse wird durch Permanentmagnete realisiert, die so an den Seiten des Gleiters angebracht werden, dass ihr Magnetfeld die Luftkissenschiene senkrecht durchsetzt. Um verschieden starke Dämpfung zu erreichen, stehen 14 Magnete zur Verfügung, die bei Nichtverwendung gegen gleich schwere Messingstücke ausgetauscht werden, damit die Masse des Gleiters konstant bleibt. Die Bremswirkung ist am stärksten bei alternierender Polung benachbarter Magnete (während sich die Felder gegenüberliegender Magnete kaum beeinflussen).

Bewegt man nun ein Ende der Federn periodisch hin und her, so erhält man eine erzwungene Schwingung. Im Versuch wird dazu ein von einem Schrittmotor angetriebener Exzenter verwendet (Da der Schrittwinkel nur 0.9° beträgt, ist die Ungleichmäßigkeit der Drehbewegung ohne nennenswerten Einfluss auf die Resonanz des Gleiters. Dafür hat die mittlere Winkelgeschwindigkeit die Konstanz eines Quarzoszillators). Die Elektronik zur Ansteuerung des Schrittmotors befindet sich im Betriebsgerät. Abbildung MR.2 zeigt ein vereinfachtes Blockschaltbild. Der Schrittmotor wird mit der oberen der beiden Tasten, die links neben der linken Siebensegmentanzeige auf der Frontplatte des Betriebsgeräts angebracht sind, eingeschaltet, mit der unteren ausgeschaltet. Beim Ausschalten bleibt der Exzenter in seiner Null-Position stehen, damit der Nullpunkt der Bewegung bei der Untersuchung freier, gedämpfter Schwingungen an derselben Stelle liegt wie bei der Untersuchung erzwungener

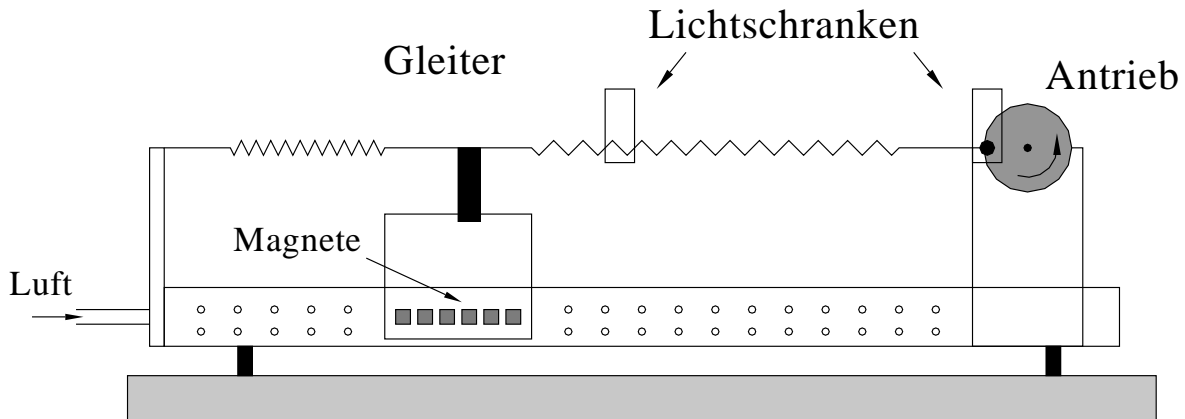


Abbildung MR.1: Schema des Luftkissengleiters

Schwingungen. Die linke Siebensegmentanzeige zeigt die Periodendauer (in s) der äußeren Kraft an. Sie kann mit den vier Tasten, die sich unter dieser Anzeige befinden, im Bereich von 1 s bis 4 s mit einer Auflösung von 1 ms verändert werden. Diese Anzeige leuchtet nur, wenn der Schrittmotor in Betrieb ist. Die Amplitude F_0 der äußeren Kraft ist konstant. Da die beiden Federn, die den Gleiter an seine Ruhelage binden, beide die gleiche Federkonstante $k/2$ haben, ist F_0/k gleich dem halben Exzenteradius. F_0/k beträgt 0,9 cm. Die Amplitude $A(\omega)$ der Schwingung kann direkt auf der Luftkissenbahn abgelesen werden. Zur Messung der Periodendauer $T = 2\pi/\omega$ der Schwingung und der Phasendifferenz Φ zwischen Gleiter und Erreger sind zwei Lichtschranken vorgesehen. Eine Doppel-Lichtschranke befindet sich in der Ruheposition des Gleiters. Sie gibt ein Signal, wenn der Gleiter die Lichtschranke von links nach rechts durchläuft. Eine in das Betriebsgerät integrierte elektronische Stoppuhr wird durch ein Signal dieser Lichtschranke ausgelesen und sofort wieder neu gestartet. Die mittlere der drei Siebensegmentanzeigen des Betriebsgeräts zeigt die ausgelesene Zeit solange an, bis diese durch das Ergebnis der nächsten Messung ersetzt wird. Diese Stoppuhr ist auch bei ausgeschaltetem Schrittmotor in Betrieb, so dass man mit ihr auch die Periodendauer freier, gedämpfter Schwingungen messen kann.

Eine weitere Lichtschranke detektiert den Nulldurchgang der äußeren Kraft. Sie wird durch den Exzenter ausgelöst. Eine zweite elektronische Stoppuhr misst die Zeit von einem Nulldurchgang der äußeren Kraft bis zum Nulldurchgang der Gleiterbewegung. Das Ergebnis wird auf der rechten Siebensegment-Anzeige auf der Frontplatte des Betriebsgeräts angezeigt. Diese Stoppuhr ist nur bei eingeschaltetem Schrittmotor in Betrieb. Aus der Verzögerungszeit ΔT bekommt man die Phasenverschiebung $\Phi(\omega)$ der Bewegung des Gleiters bezüglich der Zwangskraft

$$\Phi(\omega) = 2\pi \frac{\Delta T}{T} = \omega \Delta T. \quad (\text{MR.1})$$

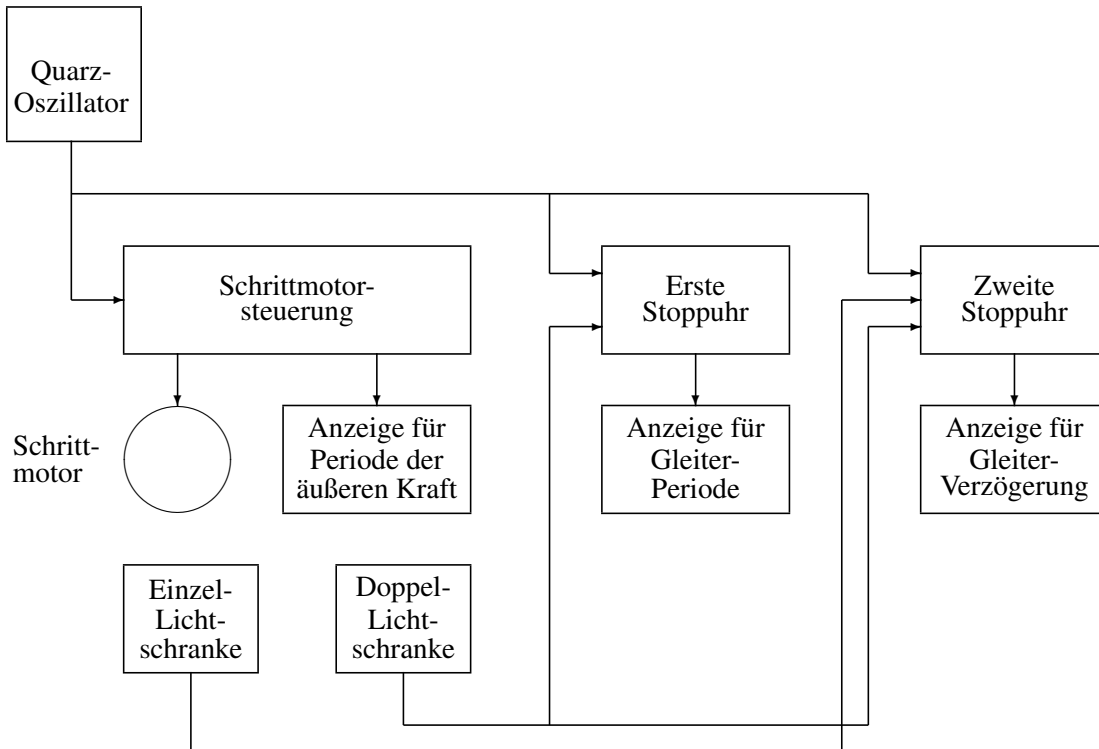


Abbildung MR.2: Vereinfachtes Blockschaltbild des Betriebsgeräts

3. Aufgaben, Hinweise

3.1. Freie Schwingungen

Es sind m Paare von Magneten anzubringen, um unterschiedliche Dämpfungen zu realisieren. Ersetzen Sie nicht benötigte Magnete durch die gleichschweren Messingstücke und bringen Sie die Magnete immer paarweise gegenüberliegend an. Vor dem Beginn einer Messung muss sichergestellt sein, dass die beiden Federn zum Stillstand gekommen sind. Starten Sie den Gleiter jeweils links vom Nullpunkt mit einer solchen Auslenkung, dass die Anfangsamplitude auf der rechten Seite ungefähr 25 cm beträgt. Die aufeinanderfolgenden Amplituden $A_{m,0}, A_{m,1}, \dots, A_{m,10}$ (bei großem m auch weniger) sind in eine Tabelle einzutragen.

1. Messen Sie die Eigenkreisfrequenz und verfolgen Sie das zeitliche Abklingen der Amplitude bei unterschiedlicher Dämpfungsstärke ($m = 0, 1, 2, 3, 5, 7$)

3.2. Erzwungene Schwingungen

2. Messen Sie die Amplitude $A(\omega)$ und die Phasenverschiebung $\Phi(\omega)$ des Gleiters in Abhängigkeit von der Erregerkreisfrequenz ω für zwei unterschiedliche Stärken der Dämpfung: $m = 7$ und $m = 2$.

Beginnen Sie mit dem wegen der kürzeren Einschwingzeit weniger problematischen Fall größerer Dämpfung ($m = 7$). Messen Sie die Resonanzkurven $A(\omega)$ und $\Phi(\omega)$

für Schwingungsdauern T zwischen 1.2 s und 3.8 s. Erhöhen Sie die Schwingungsdauer um jeweils etwa 0.2 s, in der Nähe der Resonanz um jeweils 0.1 s; Versuchen Sie die Resonanzfrequenz möglichst genau einzustellen um die Resonanzamplitude zu messen. Insgesamt entspricht dies etwa 30 Messwerten. Nach der Einstellung einer bestimmten Erregerfrequenz ist das Abklingen des Einschwingvorgangs abzuwarten. Nehmen Sie als Kriterium die Konstanz der Schwingungsdauer. Da leichte Schwankungen in der Erregung sich nicht vollständig ausschließen lassen, sollen die Werte für die Schwingungsdauer T , die Verzögerung des Nulldurchgangs des Gleiters ΔT und die Amplitude A in einem möglichst kurzen Zeitraum gemessen werden. Bei T und ΔT sind nur zwei Stellen hinter dem Komma signifikant. Die Werte sind in eine gemeinsame Tabelle einzutragen.

4. Auswertung

Zu Messung 1:

- 1.1 Lässt sich aus der Messung der Kreisfrequenzen bei unterschiedlicher Dämpfung der zweite Teil der Gleichung MR.8 qualitativ bestätigen?
- 1.2 Bilden Sie aus den Messwerten für die Amplituden $A_{m,0}, A_{m,1} \dots A_{m,10}$ die Größen $R_i = \ln(A_{m,i}/A_{m,0})$ und tragen Sie die Ergebnisse in ein Diagramm als Funktion von i ein. Man erhält Geraden, deren Steigungen (Gleichung MR.10) gleich $-\pi/Q(m)$ sind.
- 1.3 Berechnen Sie aus den Steigungen der Ausgleichsgeraden der vorhergehenden Aufgabe die Güten $Q(m)$. Tragen Sie in einem weiteren Diagramm die Kehrwerte der Güten $1/Q(m)$ als Funktion von m auf. Ermitteln Sie durch Extrapolation die für kritische Dämpfung ($1/Q = 2$) notwendige Anzahl m_{krit} von Dämpfungsmagnetpaaren.

Zu Messung 2:

- 2.1 Zeichnen Sie für beide Fälle die Resonanzkurven $A(\omega)$ und $\Phi(\omega)$ in jeweils ein Diagramm für beide Dämpfungen.
- 2.2 Bestimmen Sie im Fall der kleineren Dämpfung die Resonanzüberhöhung $R = A(\omega_r)/A(0)$ und die $1/\sqrt{2}$ -Breite $\Delta\omega$ der Amplitude. Ermitteln Sie daraus nach Gleichung MR.15 und nach Gleichung MR.17 die Güte, beachten Sie, dass F_0/k 0.9 cm beträgt. Vergleichen Sie diese Werte mit dem aus freien Schwingungen gewonnenen Wert.

5. Grundlagen

5.1. Freie, ungedämpfte Schwingung

Der Begriff der freien, ungedämpften Schwingung stellt, abgesehen von wenigen Ausnahmen³, eine Idealisierung dar. Vernachlässigt man bei einem Federpendel alle Reibungseffekte, so ist nach dem Hookeschen Gesetz die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung aus der Ruhelage:

$$F = m\ddot{x} = -kx \quad \rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (\text{MR.2})$$

Dabei ist m die Masse des Körpers (die Federmasse sei dagegen vernachlässigbar klein) und k die Federkonstante. Die Auslenkung (Elongation) $x(t)$ ergibt sich als Lösung von Gl. MR.2 zu

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_o t - \phi_0), \quad (\text{MR.3})$$

$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ist die Eigenkreisfrequenz des Federpendels, ϕ_0 ist der Phasenwinkel zur Zeit $t = 0$. x_0 und ϕ_0 sind durch den Schwingungsanfang bestimmt.

5.2. Freie, gedämpfte Schwingung

Bei einer gedämpften Schwingung wird dem schwingenden System Energie entzogen. So wird die Amplitude der Schwingung des Luftkissenfahrzeugs, das in diesem Versuch verwendet wird, aufgrund der Reibung allmählich immer kleiner werden. Einfach wird die mathematische Behandlung der gedämpften Schwingung, falls die Reibungskraft der Geschwindigkeit direkt proportional ist.

Für das Federpendel lautet die Bewegungsgleichung (vergl. Gl. MR.2)

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + kx = 0. \quad (\text{MR.4})$$

Setzt man

$$\omega_o := \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{und} \quad Q := \frac{\sqrt{km}}{\eta}, \quad (\text{MR.5})$$

so bekommt die Differentialgleichung folgende Gestalt:

$$\ddot{x} + \frac{\omega_o}{Q}\dot{x} + \omega_o^2 x = 0. \quad (\text{MR.6})$$

Dabei ist ω_o die Resonanzfrequenz eines *ungedämpften* Federpendels mit gleicher Masse und gleicher Federkonstanten. Q heißt die *Güte* des Federpendels. Sie ist umso größer, je kleiner die Reibungskonstante η ist.

Der Ansatz einer Exponentialfunktion führt zur allgemeinen Lösung von Gleichung MR.6:

$$x(t) = Ae^{(\alpha t + \varphi_0)} \quad \text{mit} \quad \alpha_{1/2} = -\frac{\omega_o}{2Q} \pm \omega_o \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \quad (\text{MR.7})$$

³aktive Entdämpfung durch positive Rückkopplung, z.B. in mechanischen Uhrwerken

Drei Fälle sind zu unterscheiden. Für $Q < 0.5$ liegt der **Kriechfall** vor. α ist reell. Das Pendel kann nicht über die Gleichgewichtslage hinausschwingen. Bei $Q = 0.5$ liegt der **aperiodische Grenzfall** vor. Auch hier geht das Pendel ohne eine volle Schwingung durchzuführen in die Gleichgewichtslage, aber mit der kleinstmöglichen Zeitkonstante $1/\omega_o$. Der **Schwingfall** ist durch Gütewerte $Q > 0.5$ gekennzeichnet. In diesem Fall wird die Pendelbewegung (nach dem Einschwingvorgang) durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\omega_o}{2Q}t} \sin(\omega t - \phi_0), \quad \text{mit } \omega = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad (\text{MR.8})$$

Die Kreisfrequenz ω ist also stets kleiner als im ungedämpften Fall. Die Dämpfungszeitkonstante $2Q/\omega_o$ wird mit zunehmender Güte, also abnehmender Dämpfung, immer größer. Die Güte bestimmt, ob ein System überhaupt noch schwingungsfähig ist. Bei nicht zu geringer Güte gilt für die relative Amplitudenabnahme während einer Schwingung

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} \approx e^{-\frac{\pi}{Q}} \quad (\text{MR.9})$$

und für die Logarithmen der Amplitudenverhältnisse gilt

$$\ln \left(\frac{A_n}{A_0} \right) \approx -\frac{\pi}{Q} n . \quad (\text{MR.10})$$

In Abbildung MR.3 ist der zeitliche Verlauf der Auslenkung eines gedämpften Federpendels im aperiodischen Grenzfall und im Falle einer gedämpften Schwingung mit der Güte 5 dargestellt.

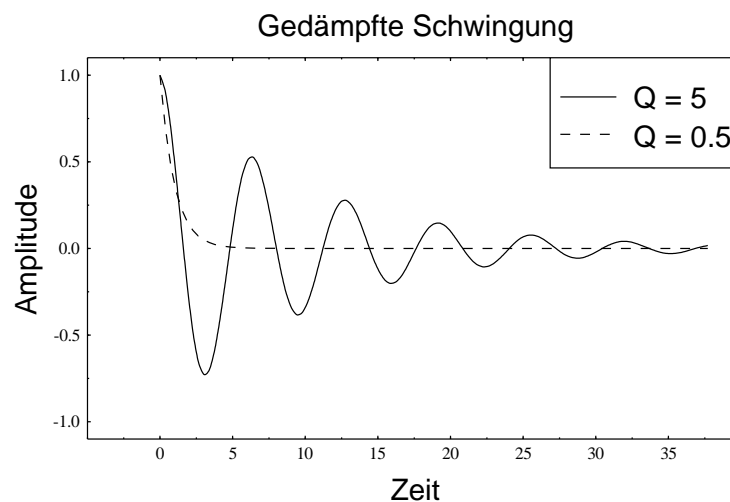


Abbildung MR.3: Zeitlicher Verlauf der Auslenkung eines gedämpften Federpendels für kritische ($Q = 0.5$) und unterkritische Dämpfung ($Q = 5$)

5.3. Erzwungene Schwingung, Resonanz

Wirkt auf ein schwingungsfähiges System mit der (ungedämpften) Eigenfrequenz ω_o eine periodische äußere Kraft F mit der Kreisfrequenz ω , so treten *erzwungene Schwingungen*

auf. In diesem Fall lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + kx = F = F_0 \cos(\omega t).$$

Setzt man nach Division durch m die in (MR.5) definierten Größen ein, so erhält man

$$\ddot{x} + \frac{\omega_o}{Q}\dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t). \quad (\text{MR.11})$$

Eine Lösung dieser Gleichung lautet

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{\cos(\omega t - \Phi(\omega))}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_o^2 \omega^2}{Q^2}}} = \frac{F_0}{k} \frac{\cos(\omega t - \Phi(\omega))}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2 \omega_o^2}}}. \quad (\text{MR.12})$$

mit der Schwingungsamplitude

$$A(\omega) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2 \omega_o^2}}}. \quad (\text{MR.13})$$

$\Phi(\omega)$ bezeichnet die Phasenverschiebung zwischen der erzwungenen Schwingung und der Erregerschwingung. Greift an einem ungedämpften System (d.h. $Q = \infty$) eine äußere Kraft mit einer Frequenz $\omega = \omega_o$ an, so kommt es zur Resonanzkatastrophe, d. h. die Schwingungsamplitude wird beliebig groß; denn der Nenner in Gleichung (MR.12) verschwindet. Auch für ein gedämpftes System erwartet man Resonanz, d. h. maximale Schwingungsamplitude bei konstanter Anregungsamplitude, in der Nähe der Eigenfrequenz des ungedämpften Systems. Die Ableitung der Schwingungsamplitude $A(\omega)$ nach ω liefert zunächst das Quadrat der Resonanzkreisfrequenz

$$\omega_r^2 = \omega_o^2 - \frac{\omega_o^2}{2Q^2}$$

und dann die Resonanzkreisfrequenz selbst

$$\omega_r = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}. \quad (\text{MR.14})$$

Die Resonanz in der Amplitude wird also schon bei einer geringeren Frequenz als der freien Schwingung (mit oder ohne Dämpfung) erreicht. Die Resonanzamplitude bekommt man durch Einsetzen von ω_r^2 aus Gleichung (MR.13) in Gleichung (MR.12) zu

$$A(\omega_r) = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \approx \frac{F_0}{k} \cdot Q. \quad (\text{MR.15})$$

Bei nicht allzu kleiner Güte ist die Resonanzamplitude also um den Faktor Q größer⁴ als die Amplitude F_0/k , die sich im Grenzfall $\omega \rightarrow 0$ einstellt.

⁴Daher rührt die Bezeichnung *Güte*

Wendet man auf $\cos(\omega t - \Phi(\omega))$ in Gleichung (MR.12) das Additionstheorem der Cosinusfunktion an, und setzt man das Ergebnis wieder in die Differentialgleichung (MR.11) ein, so bekommt man zunächst den Tangens der Phasendifferenz $\Phi(\omega)$ und dann diese selbst zu

$$\tan(\Phi(\omega)) = \frac{\omega_o \omega}{Q(\omega_o^2 - \omega^2)} \quad ; \quad \Phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega_o \omega}{Q(\omega_o^2 - \omega^2)}\right) . \quad (\text{MR.16})$$

Unabhängig von der Dämpfung ist die Phasendifferenz Φ zwischen der Erregerschwingung

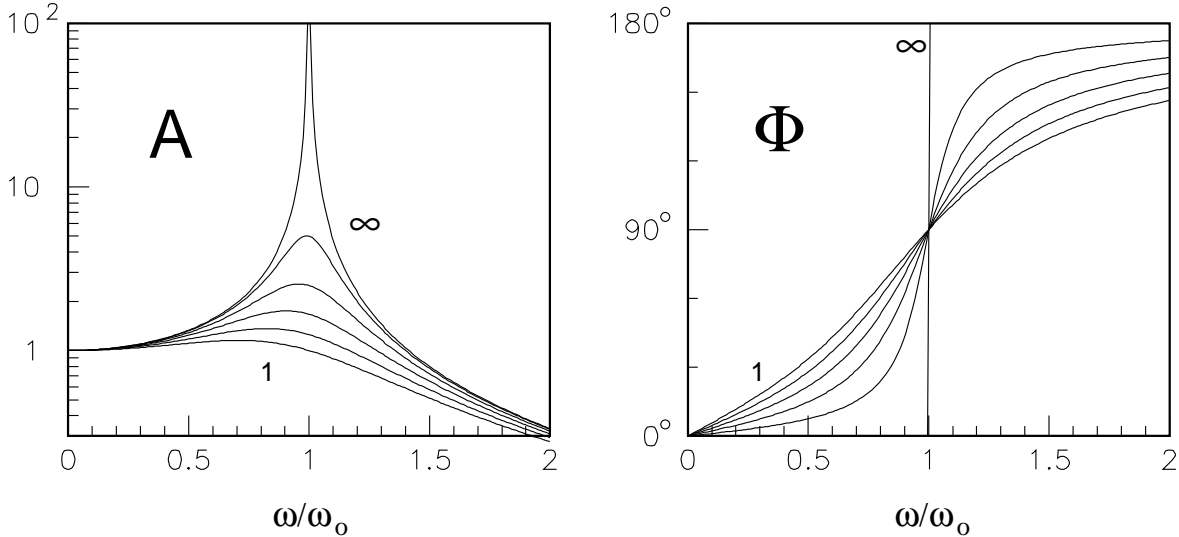


Abbildung MR.4: Frequenzabhängigkeit der Amplitude A (in Einheiten F_0/k) und der Phase Φ einer erzwungenen Schwingung ω (in Einheiten von ω_o) für verschiedene Güten von $Q = 1$ bis $Q = \infty$

und der erzwungenen Schwingung bei der Frequenz $\omega = \omega_o$ stets 90° . Abb. MR.4 zeigt die Abhängigkeit der Amplitude A und der Phasendifferenz Φ von der Erregerfrequenz. Deutlich zeigt sich hier, dass die Amplitudenkurve nicht symmetrisch zur Resonanzfrequenz ist. Das liegt daran, dass bei niedrigen Frequenzen das Federpendel in Phase mit der Erregerschwingung ausgelenkt wird und damit für $\omega \rightarrow 0$ die Amplitude den Wert F_0/k erreicht, wohingegen zu hohen Frequenzen hin die Schwingung gegenphasig wird und die Amplitude gegen null geht. Das Resonanzmaximum ist umso schmaler, je höher die Güte ist. Als Maß für die Breite der Resonanz wählen wir den Abstand zwischen den Kreisfrequenzen, bei denen die Resonanzamplitude um den Faktor $1/\sqrt{2}$ kleiner ist als im Maximum. Die beiden Kreisfrequenzen ergeben sich aus Gleichung MR.13 zu

$$\omega_{\pm} = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2} \pm \frac{1}{Q} \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}}}$$

Vernachlässigt man $1/Q^2$ gegenüber 1 und entwickelt man die verbleibende Wurzel, so bekommt man

$$\omega_{\pm} \approx \omega_o \pm \frac{1}{2Q} \omega_o, \quad \omega_+ - \omega_- = \Delta\omega_o \approx \frac{\omega_o}{Q},$$

$$Q \approx \frac{\omega_o}{\Delta\omega}. \quad (\text{MR.17})$$

Dies eröffnet einen dritten Weg zur Messung der Güte, jedenfalls bei schwacher Dämpfung: Sie ist die relative Breite der Resonanzkurve zwischen den Stellen, an denen die Amplitude um den Faktor $1/\sqrt{2}$ kleiner ist als im Maximum.

In der Nähe der Resonanz lässt sich die Frequenzabhängigkeit des Quadrats der Amplitude (und damit die Energie des Systems) durch die sogenannte *Lorentzkurve*

$$A^2(\omega) \approx \frac{F_0^2}{k^2} \cdot \frac{1}{4 \left(\frac{\omega}{\omega_o} - 1 \right)^2 + \frac{1}{Q^2}} \quad (\text{MR.18})$$

annähern. Sie ist symmetrisch zu ω_o und hat eine Halbwertsbreite (volle Breite bei halber Höhe) von $\Delta\omega = \omega_o/Q$.

Die Lorentzkurve findet sich als Linienform sowohl in der optischen Spektroskopie als auch als Breit-Wigner-Formel für Neutronenresonanzen in der Kernphysik wieder. Auch beim Mößbauereffekt wird die Resonanzabsorption durch eine Lorentzfunktion beschrieben.