PT Potentialtrog

1. Vorbereitung

Folgende Kenntnisse werden am Versuchstag vorausgesetzt:

Fragen zu den theoretischen Grundlagen:

- Wie ist die elektrische Feldstärke definiert? In welche Richtung bewegt sich eine positive bzw. negative Probeladung im elektrischen Feld?
- Wie kann man Felder graphisch darstellen?
- Was passiert mit Leitern im elektrostatischen Feld?
- Was sind konservative Kraftfelder? Welche Eigenschaften haben sie?
- Wie ist das elektrische Potential definiert?
- Was sind Äquipotentiallinien?
- Wie bestimmt man das elektrische Feld aus dem Potential?
- Wie lauten die Maxwellrelationen der Elektrostatik (integrale oder differentielle Form)?

Fragen zum Versuchsaufbau und zur Durchführung:

- Um was für eine Messbrücke handelt es sich?
- Warum bestimmt man das Potential nicht einfach mit einem Voltmeter?
- Wieso ist der Maßstab des Potentialtrogs frei wählbar?
- Welche Anforderungen müssen an den Elektrolyten gestellt werden und, viel wichtiger, warum?

2. Literaturhinweise

Staudt: Werkheft Experimentalphysik 2: Kapitel 6: Elektrostatik: Abschnitte 6.1.1-6.1.4

Berkeley: Band 2: Elektrizität und Magnetismus: Kapitel 1: Elektrostatik: Ladungen und Felder: Abschnitte 1.7-1.10; Kapitel 2: Das elektrische Potential: Abschnitte 2.1-2.4; für Interessierte: Kapitel 2: Das elektrische Potential: Abschnitte 2.7-2.10; 2.13-2.16; Kapitel 3: Elektrische Felder um Leiter: Abschnitte 3.1-3.3

Gerthsen: Kapitel 6: Elektrizität: Elektrostatik 6.1: Abschnitte 6.1.1-6.1.4; Gleichströme 6.3: Abschnitt 6.3.4b) Brückenschaltungen

Walcher: Praktikum der Physik: Kapitel 5: Elektrizitätslehre: Abschnitt 5.1.4

3. Motivation und Grundlagen

Der Verlauf der Feldlinien zwischen ladungstragenden Leitern wird bestimmt von der Form der Elektroden, Menge und Art der Ladung, die auf ihnen liegt und dem Medium, das sie umgibt.
Die Kenntnis des Feldlinienbildes ist häufig von praktischer Bedeutung, z.B. für die Gestaltung der Elektroden, die eine elektronenoptische Linse bilden.

Für raumladungsfreie [$\rho(\vec{r}) = 0$] elektrostatische Probleme erhält man den Potentialverlauf $U(\vec{r})$ aus der Theorie durch die Lösung der LAPLACE-Differentialgleichung:

$$\Delta U(\vec{r}) = 0 \tag{PT.1}$$

unter Berücksichtigung der gegebenen Randbedingungen.
Da nur zu einer sehr begrenzten Anzahl von Geometrien der Ladungsverteilungen geschlossene, analytische Lösungen existieren, werden heutzutage Aufgaben dieser Art über Gl. PT.1 numerisch berechnet. Ein Verfahren zur Berechnung von Feld- und Äquipotentiallinien mit dem PC wird Ihnen im Anhang vorgestellt.
Im Gegensatz dazu stellt die Feldbestimmung mit dem elektrolytischen Trog ein experimentelles Verfahren dar, mit dem zweidimensionale, ebene Probleme gelöst werden können.
Das Verfahren der Feldbestimmung mit dem elektrolytischen Trog beruht auf folgenden Punkten:

1. Die Potentialverteilung zwischen mehreren Elektroden, die von einem schwachen Elektrolyten umgeben sind, ist die selbe wie zwischen der gleichen Elektrodenanordnung im Vakuum oder einem homogenen Dielektrikum, d.h. es gilt (zumindest näherungsweise) die Laplace-Gleichung.

2. Die Laplace-DGL ist eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung. Aufgrund der Linearität der Laplace-Gleichung ist die relative Feldverteilung nicht vom räumlichen Maßstab und dem Absolutwert der Potentiale an den Elektroden abhängig.

Um Punkt (1) zu gewährleisten, muss der Stromdurchgang durch den Elektrolyten dem Ohmschen Gesetz gehorchen, der Elektrolyt einen hohen spezifischen Widerstand haben (geringer Strom) und homogen sein. Die Stromlinien sind dann identisch mit den Kraftlinien des elektrischen Feldes. Die in den Trog eingefüllte Flüssigkeit bildet ein Widerstandsfeld, in dem mit einer Messelektrode und einer empfindlichen Messbrücke die Potentialverteilung bestimmt werden kann.
Bei Laborversuchen betrug die maximale Genauigkeit bezogen auf die Gesamtspannung $0,2\%$.

4. Versuchsdurchführung

Auszumessen ist der Potentialverlauf zwischen drei bzw. vier Elektroden.

4.1. Messprinzip

Die Messbrücke entspricht einer Wheatstoneschen Brückenschaltung. An einem Zehngangpotentiometer werden die Widerstände R_1 und R_2 eingestellt und damit das aufzufindende Potential. Dann wird die Messbrücke durch Verschieben der Messsonde im Potentialtrog auf ein Minimum abgeglichen (ideal: I=0). Der so ermittelte Punkt C hat das am Zehngangpotentiometer eingestellte Potential.

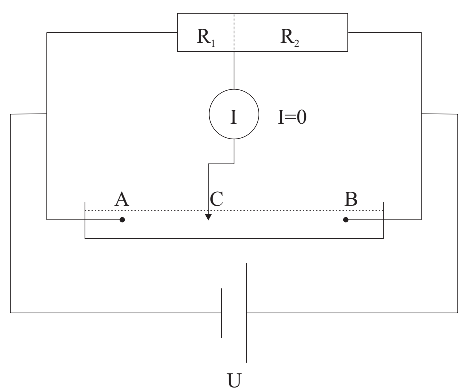

Abbildung PT.1: Messprinzip des Potentialtrogs (Dipol mit Elektrode A und Elektrode B)

4.2. Apparatur und Messung

In die Transistormessbrücke zu diesem Versuch ist neben einem Drehspulmessinstrument eine Spannungsversorgung integriert, von der 10 V Wechselspannung und 20 V Wechselspannung sowie mit einem Zehngangpotentiometer und drei Einstellpotentiometern Zwischenwerte der Gesamtspannung abgegriffen werden können. Vor dem Eingang der Messbrücke befindet sich ein Verstärker. Dessen Empfindlichkeit kann mit einem Potentiometer geregelt werden. Bei geringer Empfindlichkeit wird die Apparatur eingeschaltet. Nach dem Einstellen des gewünschten Potentials am Zehngangpotentiometer wird durch Verschieben der Sonde im Wasser auf das Minimum am Anzeigeninstrument abgeglichen. Die Empfindlichkeit wird so nachgeregelt, dass sich das Anzeigeminimum möglichst im oberen Drittel der Skala befindet. Ist eine Stelle gefunden, an der das vorgegebene Potential vorliegt, wird mit der 1:1-Zeicheneinrichtung ein Punkt auf das Millimeterpapier gebracht. (Achtung: Nicht zu fest drücken, sonst knickt die Spitze des Filzstiftes ab). Das Verbinden von Punkten gleichen Potentials ergibt die gesuchten Äquipotentiallinien.

Elektroden und Zeichenanordung dürfen während einer Messung nicht gegeneinander verschoben werden. Vor Aufnahme der Potentiallinien ist bei abgeschalteter Messbrücke die Elektrodenform durch vorsichtiges Abtasten mit der Sonde auf das Zeichenblatt zu übertragen.

Als Elektrolyt wird Leitungswasser verwendet. Dies wird mit einem Schlauch in den Trog eingelassen. Der Trog sollte nur soweit gefüllt sein, dass die Elektroden- und Isolatorflächen gerade noch trocken bleiben.
Vor dem Versuch ist zu überprüfen, ob die Sonde senkrecht ins Wasser tauchen wird, ggf. ausrichten.

Die zu vermessenden Elektrodenanordnungen: Folgende Elektrodenanordnungen werden am Praktikumsnachmittag vermessen:

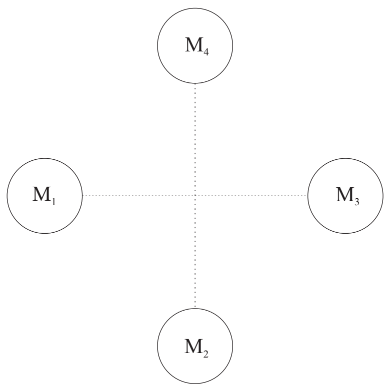

Abbildung PT.2: Elektrodenanordnung 1: Quadrupol: M_1 und M_3 liegen auf einem Potential von 0 V, M_2 und M_4 liegen auf einem Potential von 10 V

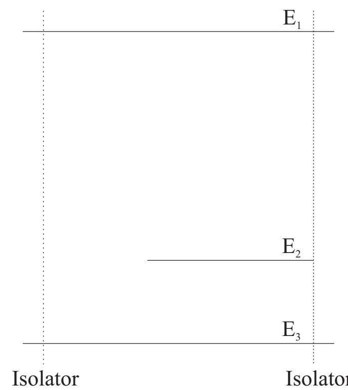

Abbildung PT.3: Elektrodenanordnung 2: Elektrostatische Linse: an Elektrode E_1 liegt eine Spannung von 10 V und an E_2 liegt eine Spannung von 0 V an, Elektrode E_3 liegt auf einem Zwischenpotential.

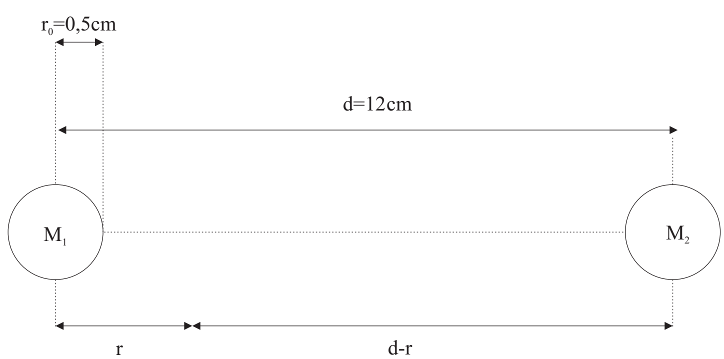

Abbildung PT.4: Elektrodenanordnung 3: Dipol: zwischen den Elektroden E_1 und E_2 liegt eine Spannung von 10 V an.

Anleitung zur Einstellung der Anordnung 2: Das Potential an der Elektrode E_3 wird wie folgt mit Hilfe der Messbrücke eingestellt (wird bei der Einweisung in das Gerät verständlich):
Empfindlichkeitsregler ganz nach links drehen. Kabel von der Messsonde abziehen und mit dem Stecker der Elektrode E_3 verbinden. Diesen an eines der Einstellpotentiometer anschließen und das vom Assistenten vorgegebene Zwischenpotential am Zehngangpotentiometer

einstellen. Verstärkung vorsichtig erhöhen bis ein Ausschlag sichtbar wird. Dann mit dem Einstellpotentiometer auf Minimum abgleichen. Nach dem Abgleich Messeingang wieder mit der Sonde verbinden.

4.3. Aufgaben und Fragen:

1. Auf welchem Prinzip beruht das Messverfahren des elektrolytischen Troges?

2. Wie funktioniert eine Wheatstone-Brücke?

3. Nehmen Sie mit dem Zeichengerät den Potentialverlauf der beiden Elektrodenanordnungen auf Millimeterpapier auf:
   Bei Anordnung 1 (Quadrupol) (Abb. PT.2) sind die Potentiallinien U=3 V, 4 V, 5 V, 5,5 V, 6 V und 7 V aufzunehmen. (Überlegen Sie sich, ob man zur Vereinfachung vorhandene Symmetrien ausnutzten kann.)
   Bei Anordnung 2 (Elektrostatische Linse) (Abb. PT.3) sind die Potentiallinien von U=1 V, 2 V,.., 9 V aufzunehmen. Legen Sie die Messpunkte so dicht, dass die Kurven gut gezeichnet werden können. In der Nähe der Spitze von E_2 und auch bei den Isolatoren sind die Punkte dichter zu legen.

4. Zeichnen Sie zu Hause für die aufgenommenen Anordnungen die Äquipotentiallinien und die elektrischen Feldlinien einschließlich Richtungspfeilen ein. Die elektrischen Feldlinien sind so zu zeichnen, dass jeweils 2 Äquipotentiallinien und 2 Feldlinien angenähert ein Quadrat einschließen. Dann ist die Dichte der Feldlinien ein relatives Maß für den Betrag der Feldstärke an der betreffenden Stelle.

5. Wird die Elektrodenanordnung 2 zu einer Ringform erweitert, so wirkt diese auf Elektronen wie eine Sammellinse (Abb. PT.5). Diskutieren Sie mit Hilfe des Assistenten die Elektronenbahnen.

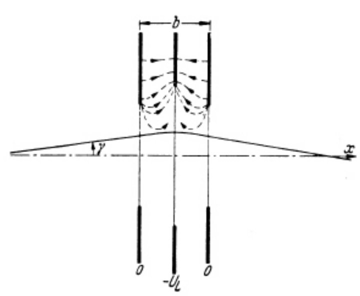

Abbildung PT.5: Erweiterung von Elektrodenanordnung 2 zu einer elektrostatischen Rundlinse und Skizze einer Elektronenbahn.

6. Bei der Elektrodenanordnung 3 (Dipol) (Abb. PT.4) soll der Potentialverlauf $U = f(r)$auf der Achse $M_1 - M_2$ bestimmt werden. Richten Sie hierzu Trog und Zeicheneinrichtung so aus, dass sich die Sonde beim Parallelverschieben genau auf der Achse zwischen den Zylindermitten bewegt. Variieren Sie U von 2 V bis 8 V in

Schritten von 0,5 V am Zehngangpotentiometer.
Die erhaltenen Punkte ermöglichen es Ihnen, zu jedem U ein r zu bestimmen ($r =$ Abstand von einem Zylindermittelpunkt bis zum Messpunkt). In einem Diagramm wird der gemessene Potentialverlauf mit den Kurven der theoretischen Näherungen

$$U_{\mathrm{zyl}}(r) = \frac{U^*}{\ln \frac{d-r_0}{r_0}} \cdot \ln \frac{r}{d-r} + U^*$$

für zylinderförmige Elektroden und

$$U_{\mathrm{kug}}(r) = \frac{U^*}{\left(\frac{1}{d-r_0} - \frac{1}{r_0}\right)} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d-r}\right) + U^*$$

für kugelförmige Elektroden verglichen ($U^* = 5\,\mathrm{V}$). Versuchen Sie zu erklären, woher die Abweichungen kommen.

7. Das Potential eines Quadrupols wird mittels eines iterativen numerischen Verfahrens nach Gleichung PT.3 berechnet, siehe Anhang. Wie ändert sich das Ergebnis mit der Anzahl der Iterationsschritte? Speichern Sie den Konturplot der Äquipotentiallinien als Grafikdatei ab und vergleichen Sie das Rechenergebnis mit ihren Messergebnissen.

8. Erläutern Sie die allgemeinen Eigenschaften des Nabla-Operators $\vec{\nabla}$. Zeigen Sie seine Anwendungsmöglichkeiten anhand von Beispielen auf.

9. Welche wesentlichen Gleichungen der Elektrodynamik kennen Sie? Versuchen Sie, die Laplace-Dgl. herzuleiten.

5. Anhang: Die Relaxationsmethode zur Lösung der Laplacegleichung

In einem zweiten kleinen Teil wird Ihnen am Praktikumsnachmittag für ein einfaches Beispiel eine einfache Methode zur numerischen Lösung der Laplace-Gleichung am PC gezeigt.

5.1. Problem:

Es gibt keine allgemeine analytische Methode, um elektrostatische Probleme zu lösen, da nur für ganz spezielle Situationen analytische Lösungen existieren.
$\Rightarrow$ Notwendig sind numerische Verfahren.

5.2. Formulierung der zu lösenden Aufgabe:

Im Allgemeinen ist die Bestimmung des elektrostatischen Potentials $U(\vec{r})$ $(\text{Lösen der Gleichung}: \Delta U(\vec{r}) = 0)$ einfacher als die des elektrischen Feldes $\left(\text{Lösen der Gleichungen}: \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \text{ und } \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \text{ für } \rho(\vec{r}) = 0\right)$.

Ursache: das Potential ist ein Skalarfeld, das elektrische Feld ist ein Vektorfeld.

Es genügt das Potential numerisch zu berechnen, da das elektrische Feld leicht aus einem gegebenen Potential bestimmt werden kann mit:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} U(\vec{r})$$

Aufgabe:

- Lösung der Laplace-Gleichung in 2 Dimensionen bei gegebenen Randbedingungen
- Berechnung des elektrischen Feldes aus dem Potential U

5.3. Die numerische Berechnung:

Es gilt: Die Lösung der Laplace-Gleichung ist in einem abgeschlossenen Volumen eindeutig bestimmt, wenn das Potential auf dem Rand gegeben ist (Randwert-Problem).

Zweidimensionale Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten:

$$\Delta U(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x,y) = 0$$

Diskretisierung der Laplace-Gleichung:

- Approximation von $U(x,y)$ auf einem zweidimensionalen Punktgitter mit konstantem Gitterabstand h;
  $\Rightarrow$ Berechnung der Matrix $U(x_\mathrm{i}, y_\mathrm{j}) := U(i,j)$ mit

  $$x_\mathrm{i} = ih$$

  $$y_\mathrm{j} := jh$$

- Übergang von der Differentialgleichung zu einer Differenzengleichung durch Diskretisierung der Differentialoperatoren $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$:

  – Allgemein: gegeben sei eine beliebige genügend oft differenzierbare Funktion $f(x)$;
    die einfachste Näherungsformel für eine numerische Berechnung der ersten Ableitung einer Funktion ist:

    $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

Eine Taylor-Reihen-Entwicklung der Funktion $f(x)$ liefert:

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 \pm \frac{1}{6}f'''(x)h^3 + \cdots$$

– Daraus erhält man wie folgt die Zweipunkt-Formel für die zweite Ableitung:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + f''(x)h^2 + \frac{1}{12}f''''(x)h^4 + O(h^6)$$
$$\Rightarrow f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} + O(h^2)$$
$$\text{mit:} \quad O(h^2) = -\frac{h^2}{12}f''''(x) + ...$$

- Damit erhält man für die diskretisierte Laplace-Gleichung:

$$\frac{U(i+1,j) + U(i-1,j) - 2U(i,j)}{h^2} + \frac{U(i,j+1) + U(i,j-1) - 2U(i,j)}{h^2} = 0 \tag{PT.2}$$

Iterationsvorschrift: Aus Gl. PT.2 ergibt sich für das Potential auf einem Gitterpunkt (i,j) folgende Iterationsvorschrift, wobei n den Iterationsschritt bezeichnet:

$$\boxed{U^{n+1}(i,j) = \frac{U^n(i+1,j) + U^n(i-1,j) + U^n(i,j+1) + U^n(i,j-1)}{4} \qquad \text{(PT.3)}}$$

Man erhält also das Potential an einem Gitterpunkt (i,j) zum Iterationsschritt $n+1$ aus den Potentialen der vier nächsten Nachbarn zum vorigen Iterationsschritt n.

Berechnung des Potentials: Die Gl. PT.3 gilt für alle inneren Gitterpunkte $U(i,j)$, die Randwerte sind gegeben. Zu Lösen ist also ein lineares Gleichungssystem mittels Iteration:

1. Vorgabe der Startwerte $U(i,j)$ zum Iterationsschritt $n = 0$: Vorgabe der Potentiale der Elektroden, der Randwerte und einer vernünftigen Näherungslösung für die inneren Gitterpunkte, also die unbekannten $U(i,j)$.

2. Aus den Startwerten wird eine verbesserte Näherungslösung für die inneren Gitterpunkte $U(i,j)$ zum Iterationsschritt $n+1$ mit Gl. PT.3 berechnet, wobei das Potential der Elektroden und die Randwerte nicht verändert werden dürfen.

3. Überprüfung, ob die verbesserte Näherungslösung folgendes Konvergenzkriterium erfüllt: Die neuen Werte $U(i,j)$ unterscheiden sich von den alten Werten $U(i,j)$ in keinem Punkt um mehr als einen vorgegebenen Wert ϵ. Wenn diese Kriterium nicht erfüllt ist, zurück zu Schritt zwei.