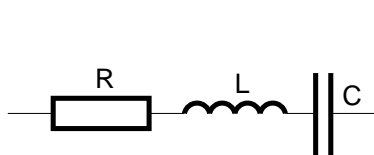


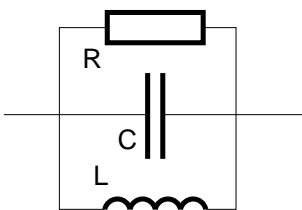
RE Elektrische Resonanz

1. Problemstellung

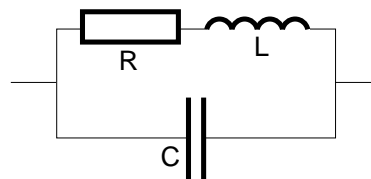
An drei verschiedenen Resonanzkreisen soll der Wechselstromwiderstand (auch Impedanz genannt) Z und die Phasenverschiebung φ (zwischen Stromstärke und Spannung) in Abhängigkeit von der Frequenz untersucht werden. Als Messgerät dient ein Oszillograph. Es sollen folgende Resonanzkreise untersucht werden:



Serienschwingkreis

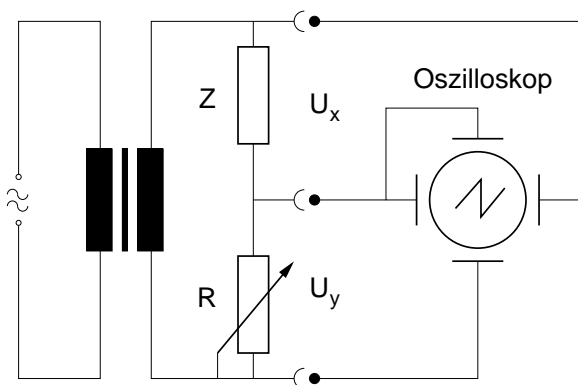


Parallelkreis 1. Ordnung



Parallelkreis 2. Ordnung

2. Messprinzipien

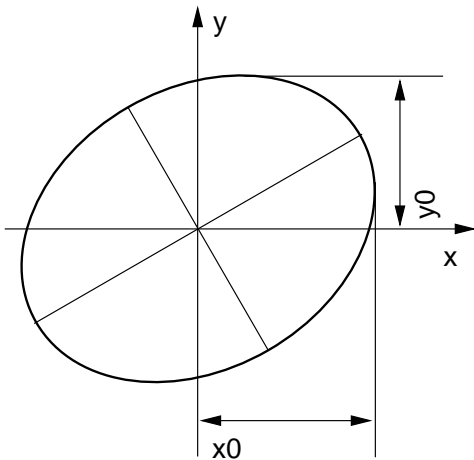


Man benutzt eine Versuchsanordnung, wie sie nebenstehend skizziert ist. An die Reihenschaltung, bestehend aus dem zu vermessenden Resonanzkreis und einem verstellbaren Ohmschen Widerstand, wird eine Wechselspannung bekannter Frequenz angelegt. Die Impedanz ergibt sich, wenn die Kreisspannung $U_x = \hat{U}_x \sin(\omega t)$ sowie der durchfließende Strom $I = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi)$ nach Betrag und Phase bestimmt sind. Dazu wird die Spannung U_x an die X-Ablenkung des Oszillographen gelegt; der Strom I wird nicht direkt gemessen, sondern durch den an R entstehenden Spannungsabfall. Diese Spannung

wird an die Y-Ablenkung des Oszillographen gelegt. Sie ist in Phase mit I und über die Beziehung $U_y = R \cdot I = R \cdot \hat{I} \sin(\omega t + \varphi) = \hat{U}_y \sin(\omega t + \varphi)$ mit dem Strom verknüpft.

2.1. Lissajous-Figur

Die beiden Spannungen U_x und U_y ergeben auf dem Oszillographenschirm eine (Lissajous-) Überlagerungsfigur. Es ist eine Ellipse, deren Form und Größe von \hat{U}_x, \hat{U}_y und φ bestimmt wird. Die Vermessung der Ellipse gestattet deshalb die Bestimmung von $|Z| (= \hat{U}_x / \hat{I} = \hat{U}_x / (\hat{U}_y / R))$ und von φ .



Mit den Abbildungsfaktoren p_x und p_y des Oszillographen (der Abbildungsfaktor p gibt an, welche angelegte Spannung einer Ablenkung von 1 cm des Elektronenstrahls entspricht) erhalten wir in x -Richtung eine Auslenkung von $p_x \cdot X(t) = \hat{U}_x \sin \omega t$ und in y -Richtung eine Auslenkung von $p_y \cdot Y(t) = \hat{U}_y \sin(\omega t + \varphi)$

Zur Messung und Auswertung stellt man zu jeder Frequenz ω die Spannungen \hat{U}_x und \hat{U}_y so ein, dass die Ellipse in ein Quadrat passt. Dann gilt:

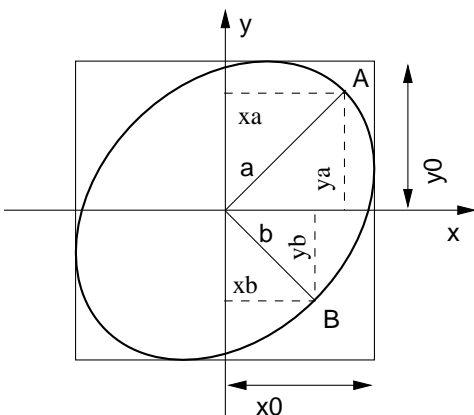
$$X_0 = Y_0 =: Z_0 \quad (\text{RE.1})$$

Bestimmung des Widerstandes $|Z|$

Allgemein ist der Wechselstromwiderstand $|Z| = U_{\text{eff}}/I_{\text{eff}} = \hat{U}/\hat{I}$ definiert. \hat{I} wird über den Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand R bestimmt, somit gilt:

$$\begin{aligned} \hat{U} &= p_x \cdot Z_0 \\ \hat{I} &= p_y \cdot \frac{Z_0}{R} \\ |Z| &= R \cdot \frac{p_x}{p_y} \end{aligned} \quad (\text{RE.2})$$

Bestimmung des Phasenwinkels φ



Wir gehen wieder von der Parameterdarstellung der Ellipse $X(t) = Z_0 \sin \omega t, Y(t) = Z_0 \sin(\omega t + \varphi)$ aus und versuchen, eine Beziehung zwischen dem Phasenwinkel φ und den Halbachsen der Ellipse herzustellen. Zu einem bestimmten Zeitpunkt t' befindet sich der Elektronenstrahl am Ort A (große Halbachse). Es gilt (da A auf der Ellipse liegt):

$$\begin{aligned} X' := X(t') &= Z_0 \sin \omega t' \\ \text{und } Y' := Y(t') &= Z_0 \sin(\omega t' + \varphi). \end{aligned}$$

Wegen Bedingung (RE.1) muss

$$X(t') = Y(t') \quad (\text{RE.3})$$

sein, wodurch t' (bis auf $n \frac{T}{2}$) festgelegt ist. Es ergibt

sich deshalb für a^2 :

$$a^2 = X^2(t') + Y^2(t') = 2 \cdot Z_0^2 \sin^2 \omega t'.$$

Im Punkt B (kleine Halbachse) befindet sich der Strahl um $T/4$ früher (bzw. später), also zum Zeitpunkt

$$t'' = t' - \frac{T}{4} = t' - \frac{\pi}{2\omega}$$

(wg. $T = \frac{2\pi}{\omega}$). Somit ist auch b^2 bekannt:

$$b^2 = X^2(t'') + Y^2(t'') = 2 \cdot Z_0^2 \sin^2 \omega t''.$$

mit $\omega t'' = \omega t' + \frac{\pi}{2}$ wird daraus:

$$b^2 = 2 \cdot Z_0^2 \cos^2 \omega t'$$

Der Quotient aus a^2 und b^2 ergibt:

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{2 \cdot Z_0^2 \cos^2 \omega t'}{2 \cdot Z_0^2 \sin^2 \omega t'} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\cos \omega t'}{\sin \omega t'}$$

Zur Zeit t' gilt wegen (RE.3) die Beziehung:

$$\begin{aligned} \sin \omega t' &= \sin(\omega t' + \varphi) = \sin \omega t' \cdot \cos \varphi + \cos \omega t' \cdot \sin \varphi \\ 1 &= \cos \varphi + \frac{b}{a} \cdot \sin \varphi \\ \frac{b}{a} &= \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}} = \tan \frac{\varphi}{2} \end{aligned} \quad (\text{RE.4})$$

Also gilt für den Phasenwinkel φ :

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a}$$

Allerdings ist φ durch diese Ellipsenmethode nur betragsmäßig bestimmbar, das Vorzeichen steckt im Umlaufsinn der Ellipse. Da dieser sowohl wegen der Trägheit des Auges wie auch des Nachleuchtens des Schirms nicht zu erkennen ist, muss das Vorzeichen theoretisch bestimmt werden.

2.2. Messung mit einem Digitaloszilloskop

Mit einem Zweikanal-Digitaloszilloskop (Tektronix TDS 3012) ist es möglich, die Amplituden von Spannung und Strom sowie deren Phasenverschiebung im Zweikanalbetrieb direkt zu messen. Man misst dazu wieder die Spannungen U_x und U_y ; es ist jedoch nicht nötig, den variablen Widerstand R zu verändern.

2.3. Messung mit CASSY

CASSY (Computer Assisted Science SYstem, hergestellt von der Firma LD Systeme) ist eine kaskadierbare Messwerterfassung für den PC, bestehend aus den Interfaces POWER-CASSY (Strom- und Spannungsquelle, Funktionsgenerator) und SENSOR-CASSY (Spannungs- und Strommessung mit zwei Eingängen, Anschluss von Sensoren) sowie der Software CASSY-Lab, die zur Datenaufnahme und -auswertung dient.

Zur Bestimmung der Resonanzkurven wird POWER-CASSY als Sinusgenerator verwendet, die Spannungen U_x und U_y des Messaufbaus werden an die Eingänge INPUT A bzw. INPUT B des SENSOR-CASSY angeschlossen. CASSY-Lab stellt die Frequenz in vorgebbaren Schritten automatisch ein, misst jeweils die Effektivwerte von Strom und Spannung (d.h. U_x und U_y) und ermittelt die Phasenverschiebung. Die Umrechnung und grafische Darstellung der benötigten Größen (Impedanz, Admittanz, Leistung) erfolgt ebenfalls mit Hilfe der Software CASSY-Lab.

3. Vermessung der drei Resonanzkreise

Messen Sie jeweils einen Resonanzkreis sowohl mit dem analogen als auch dem digitalen Oszilloskop. Verwenden Sie eine Induktivität von $L \approx 300$ mH und einer Kapazität von $C \approx 5$ nF. Als Widerstände sind zu benutzen:

Reihenkreis: $R \approx 3.3$ k Ω

Parallelkreis I. Ordnung: $R \approx 22$ k Ω

Parallelkreis II. Ordnung: $R \approx 1.5$ k Ω

Die genauen Werte von R , L und C sind auf den Bauelementen angegeben. Für die Messungen mit CASSY benutzen Sie eine Kapazität von $C \approx 22$ nF.

3.1. Analoges Oszilloskop: Lissajous-Figur

Im Bereich 500 - 8000 Hz (500 Hz - Schritte) werden die Ellipsen in das auf dem Oszilloskop-Schirm vorgezeichnete Quadrat abgeglichen und die zur Berechnung von $|Z|$ und φ nötigen Größen bestimmt (R , a , b , p_x , p_y). Das Vorzeichen von φ ist über eine vorzeichenbehaftete kleine Halbachse b zu berücksichtigen.

3.2. Messung mit einem Digitaloszilloskop

Schließen Sie die Ausgänge U_x und U_y der Messanordnung an die Eingänge CH 1 bzw. CH 2 des TDS 3012 an. Stellen Sie das Digitaloszilloskop auf Zweikanalmodus ein und definieren Sie über das Menü MESSUNG folgende Messgrößen:

- Amplitude Kanal 1 (Spannung U_x)

- Amplitude Kanal 2 (Spannung U_y)
- Frequenz Kanal 1 (Spannung U_x)
- Phase Kanal 1 \rightarrow Kanal 2

Stellen Sie bei jeder Messung sicher, dass wenigstens eine vollständige Periode sichtbar ist und die Kurven weder oben noch unten beschnitten werden (Vermeidung von Clipping). Mit der Taste **AUTOSET** lässt sich dies leicht erreichen. Für eine genauere Messung empfiehlt es sich, unter **ERFASSUNG / MENÜ** eine Mittelwertbildung zu definieren. Messen Sie mit diesem Aufbau einen weiteren Kreis mit den oben angegebenen Bauelementen bei einer Stützstellenweite von ca. 250 Hz.

3.3. Messung mit CASSY

Starten Sie den Messrechner unter Windows XP und melden Sie sich unter „Praktikum“ an. Starten Sie das Programm **CASSY-Lab** durch Klick auf das entsprechende Symbol mit der Unterschrift „Elektrische Resonanz“. Damit werden bereits alle notwendigen Messparameter und -größen definiert.

Folgende Funktionen von **CASSY-Lab** sind für die Durchführung des Versuchs wichtig:



Einstellungen oder Messparameter ändern.

Damit können die Messanordnung (unter **CASSY**), Messgrößen und daraus abgeleitete Größen (Parameter/Formel/FFT) sowie die verschiedenen Darstellungen definiert werden.



Start und Stop einer Messreihe.

Eine Messreihe muss gestartet und nach Messung von n_0 Punkten wieder gestoppt werden. Aufeinander folgende Messreihen werden in verschiedenen Farben dargestellt, bei der Abspeicherung werden die Messreihen durch Leerzeilen getrennt.



Abspeichern der Messreihe

Sie können die gemessenen Werte entweder im **CASSY-Lab**-eigenen Format abspeichern (reine Textdatei), oder als (Text-)Messwerttabelle, die alle definierten Mess- und abgeleiteten Größen in entsprechenden Spalten bereit hält. Beide Formate können problemlos in gängige Tabellenkalkulationsprogramme importiert werden.



Löschen aller Messwerte

Verwenden Sie für alle Kreise die Spule mit ca. 300 mH sowie einen Kondensator von ca. 22 nF. Stellen Sie den Vorwiderstand R auf 10 k Ω ein. Berechnen Sie vor Beginn der Messungen die jeweiligen Resonanzfrequenzen f_1 und stellen Sie diese vor Beginn jeder neuen

Messreihe ein. Die Messpunkte sind dann um f_1 besonders dicht, zudem wird f_1 zur Berechnung des Vorzeichens von φ benutzt, da Sensor-CASSY nur $\cos \varphi$ ermitteln kann. Legen Sie die Zahl der Messpunkte pro Messreihe n_0 fest (max. 50). Folgende Messungen sollen mit CASSY durchgeführt werden, dabei sollte zunächst jeder Kreis einmal vermessen werden, anschließend kann in Abhängigkeit von der noch zur Verfügung stehenden Zeit mit dem zweiten Widerstand gemessen werden.

- a) Messen Sie den Reihenkreis mit zwei verschiedenen Widerständen (ca. $3.3 \text{ k}\Omega$ und ca. $1.5 \text{ k}\Omega$)
- b) Messen Sie den Parallelkreis 1. Ordnung mit $22 \text{ k}\Omega$ und $47 \text{ k}\Omega$.
- c) Messen Sie den Parallelkreis 2. Ordnung mit $1.5 \text{ k}\Omega$ und 330Ω .

Speichern Sie nach Ende aller Messungen Ihre Ergebnisse ab. Kopieren Sie die Datei(en) anschließend entweder auf eine mitgebrachte Diskette, einen Memory-Stick o.ä. oder verschicken Sie diese per E-Mail.

4. Auswertung

1. Man berechne für die drei Resonanzkreise formal mit Hilfe des Zeigerdiagramms oder der komplexen Wechselstromrechnung
 - den Wechselstromwiderstand $|Z|$
 - den Phasenwinkel φ
 - die Resonanzfrequenz ω_0 bzw. f_0 .

Leiten Sie diese Formeln bereits **in der Vorbereitung** auf den Versuch ab. Die durch Einsetzen der angegebenen Werte für L , C und R errechneten Resonanzfrequenzen vergleiche man mit den experimentell ermittelten.

2. Für die gemessenen Schwingkreise sind jeweils die Diagramme $|Z|$ und φ als Funktion von $f = \omega/2\pi$ zu zeichnen. Zeichnen Sie zum Vergleich auch die theoretischen Kurven der Funktionen.
3. Zur Auswertung der mit CASSY-Lab ermittelten Werten können Sie das Programm auch auf Ihrem PC installieren: Für den Betrieb ohne Messgeräte kann es uneingeschränkt verwendet werden. Die Software auf der Website der LD Systeme AG www.ld-systeme.de unter CASSY-S herunter geladen werden. Sie können ebenso gut ein anderes geeignetes Programm verwenden.

Stellen Sie folgende Diagramme dar und vergleichen Sie diese mit theoretisch ermittelten Werten:

- Impedanz $|Z|$ in Abhängigkeit von f
- Phasenverschiebung φ in Abhängigkeit von f

- Ortskurven von Z (d.h. $\Im m Z$ gegen $\Re e Z$)
 - Ortskurven der Admittanz $Y = 1/Z$
4. Für die Berechnung der Fehler von $|Z|$ und φ sollte ebenfalls der PC genutzt werden. Zur Ermittlung des systematischen Fehlers der theoretischen Kurve gehen Sie von einem relativen Fehler von jeweils 1 % für R , L und C aus, der zufällige Fehler der Messwerte ist aus dem Ablesefehler von X_0 , Y_0 , a und b abzuleiten (aus Parallaxenfehler abschätzen); der systematische Fehler (Ursachen?) ist im Vergleich dazu vernachlässigbar. Alternativ können Sie ohne PC den Fehler für *einen* Messpunkt exemplarisch bestimmen (z.B. in der Resonanz).

Stichworte: Erzwungene elektrische Schwingung, elektrischer Schwingkreis, Stromresonanz, Spannungsresonanz, Thomsonsche Schwingungsgleichung.

Literatur: Bergmann-Schaefer II (Wechselstromkreis mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität, freie elektrische Schwingung), Staudt: Experimentalphysik II, LD Systeme AG: Anleitung zu CASSY-Lab (auf <http://www.ld-systeme.de>)

Zubehör: Es stehen zur Verfügung:

- 1 analoges Oszilloskop HAMEG pro Versuchsplatz
- 1 RC-Generator pro Versuchsplatz
- 1 Quarz-Frequenzmesser pro Versuchsplatz
- 1 Versuchsaufbau pro Versuchsplatz
- 3 Koaxial-Kabel pro Versuchsplatz
- 1 Digitaloszilloskop Tektronix TDS 3012
- 2 Messsysteme CASSY-S mit PC