

SA-G Grundlagen zum Versuch Saitenschwingungen

1. Die harmonische Schwingung

Wir stellen uns folgenden Aufbau vor: Ein reibungsfrei auf einer Schiene gelagerter Schlitten sei einseitig an einer Feder befestigt. Jemand hat ihm einen Stoß versetzt, und nun gleitet er rhythmisch zur Feder hin und von dieser weg. Wie können wir diese Bewegung genauer kennzeichnen?

Wir sehen, daß der Schlitten regelmäßig einen der Federaufhängung nächsten und einen ihr fernsten Wendepunkt erreicht. Die Hälfte dieser Strecke nennen wir *Amplitude*. Sie ist also die Entfernung zwischen der *Ruhelage* des Schlittens und einem Wendepunkt. Zum anderen können wir mit einer Stoppuhr messen, wie lange der Schlitten braucht, um einen Wendepunkt wieder zu erreichen. Diese Zeit nennen wir *Schwingungsdauer* τ , ihren Kehrwert *Frequenz* ν ; letztere bedeutet also die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit.

Trotzdem wissen wir jetzt noch nicht, wo genau sich der Schlitten zu einem beliebigen Zeitpunkt befindet. Uns fehlt die *Ortsfunktion in Abhängigkeit von der Zeit*. Hier hilft uns die Kenntnis der herrschenden Kräfte weiter. Nach Newton ist die *Kraft* die zweite Ableitung der Ortsfunktion nach der Zeit (Schreibweise: $\ddot{x}(t)$ oder $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, im Folgenden oft auch einfach x statt $x(t)$) multipliziert mit der Masse m des Schlittens, also

$$F = m \cdot \ddot{x} . \quad (\text{SA-G.1})$$

Die Feder hat die Eigenschaft, daß ihre Rückstellkraft mit der Proportionalitätskonstanten k linear zu ihrer Auslenkung ist:

$$m\ddot{x} = -kx, \quad k > 0 .$$

Wege, Geschwindigkeiten und Kräfte sind *Vektoren* und damit gerichtete Größen. Das Minus vor der Proportionalitätskonstanten k bedeutet, daß die Kraft der Auslenkungsrichtung entgegengesetzt wirkt. Die Linearität von k bedeutet, daß für eine Stauchung um einen Bruchteil $q \cdot x$ auch nur der Bruchteil q der Kraft benötigt wird, die für die Stauchung um x angewendet werden muß. Aus

$$m\ddot{x} = -kx$$

erhalten wir durch umformen

$$m\ddot{x} + kx = 0 ,$$

und nach Division durch m

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 , \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} . \quad (\text{SA-G.2})$$

ω heißt *Winkelgeschwindigkeit* oder *Kreisfrequenz*. Diese Gleichung stellt einen Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer zweiten Ableitung her, deshalb spricht man hier auch von einer *Differentialgleichung*. Unsere Ortsfunktion muß sich mit ihr vertragen, das heißt eine *Lösung der Differentialgleichung* sein. Die trigonometrischen Funktionen

$$x_1(t) = A \sin(\omega t) \quad \text{und} \quad x_2(t) = B \cos(\omega t) \quad (\text{SA-G.3})$$

können das. (Und sie sind, was gar nicht selbstverständlich ist, die einzigen!). A und B sind hierbei noch vorläufig unbestimmte Amplitudenkonstanten. $x_1(t)$ und $x_2(t)$ sind *harmonische* Funktionen, daher der Name für diese Schwingungsform.

In unserem Gedankenexperiment war dem Schlitten ein Stoß versetzt worden, der ihn aus der Ruhelage ($x = 0$) ins Schwingen brachte. Deshalb schreiben wir

$$x(0) = 0.$$

Unter dieser Bedingung bleibt nur $x_1(t)$ als mögliche Ortsfunktion, denn

$$\begin{aligned} x_1(0) &= A \underbrace{\sin(\omega \cdot 0)}_{=0} = 0 \text{ ist mit } A \neq 0 \text{ vereinbar,} \\ x_2(0) &= B \underbrace{\cos(\omega \cdot 0)}_{=1} = 0 \text{ kann nur mit } B = 0 \text{ erreicht werden.} \end{aligned}$$

Mit

$$x(t) = x_1(t) = A \sin(\omega t)$$

als Ortsfunktion ist A als die Amplitude bestimmt ($0 \leq |\sin(\omega t)| \leq 1$). Im allgemeinen Fall, also bei beliebigen Anfangsorten und –geschwindigkeiten (Stößen), überlagern sich die Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ auf kompliziertere Art und Weise (siehe Resonanzversuch).

Des weiteren können wir jetzt auch die *Geschwindigkeit* des Schlittens im Nulldurchgang (also bei $x = 0$) bestimmen:

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{d}{dt} A \sin(\omega t) = \omega A \cos(\omega t).$$

Jetzt müssen wir die Zeit einsetzen, bei welcher $x = 0$ gilt und erhalten:

$$v_0 = v(0) = A\omega \underbrace{\cos(\omega \cdot 0)}_{=1} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A.$$

So erfahren wir im Nachhinein durch Ablesen der Amplitude A , auf welche Geschwindigkeit der Stoß den Schlitten zum Zeitpunkt $t = 0$ gebracht hatte.

Schließlich ergibt sich noch der Zusammenhang zwischen der beobachteten Schwingungs– oder Periodendauer τ und den *Systemgrößen* k und m : Nach der Zeit τ muß sich der Schlitten wieder am gleichen Ort befinden, was uns zu der Bedingung führt:

$$x(t + \tau) = x(t),$$

in unserem Fall

$$\begin{aligned} A \sin(\omega(t + \tau)) &= A \sin(\omega t + \omega\tau), \\ \text{also } \omega\tau &= 2\pi = \sqrt{\frac{k}{m}} \tau, \quad \tau = \sqrt{\frac{m}{k}} 2\pi. \end{aligned} \quad (\text{SA-G.4})$$

Interessant ist hierbei, daß die Schwingungsdauer nicht von der Auslenkung A abhängt, sondern nur von k und m ; sie ist eine *Systemeigenschaft*.

1.1. Erweiterungen des Systems (*Rechnungen im Herleitungsteil*)

Bisher wurde der Schlitten nur einseitig an einer Feder befestigt. Wir ersetzen ihn jetzt durch ein freischwebendes Massestück, das zwischen 2 identischen Federn eingespannt ist (Abb. SA-G.1). Es erfährt die rücktreibenden Kräfte der beiden Federn, so daß sich die Gesamtkraft

$$m\ddot{x} = -kx + (-kx) = -2kx$$

ergibt. Wie oben erhalten wir dann die Kreisfrequenz

$$\omega_x = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

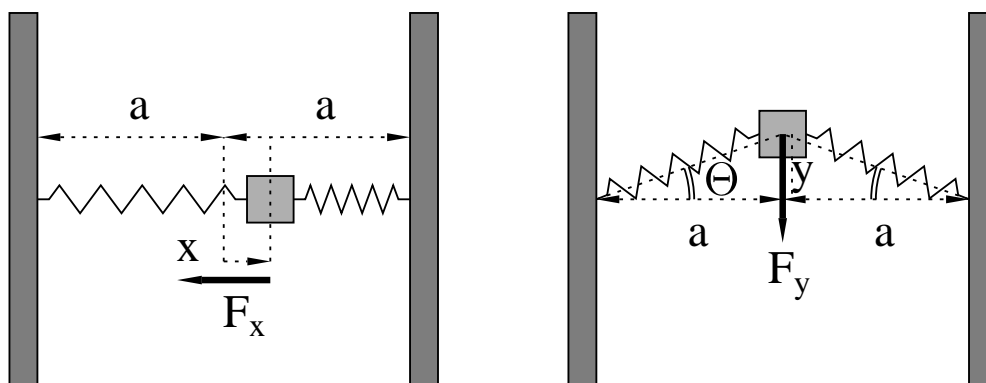


Abbildung SA-G.1: Einzelnes Massestück zwischen 2 Federn

Das Massestück kann allerdings auch senkrecht zu den Federn (in die y -Richtung) ausgelenkt werden. Für kleine Auslenkungen schwingt es dann mit

$$\omega_y^2 = \omega_x^2 \left(1 - \frac{a_0}{a}\right). \quad (\text{SA-G.5})$$

Dabei ist a_0 die Länge einer ungespannten, a die Länge der gespannten Feder. Man sieht, daß für sehr stark gespannte Federn ($a \gg a_0$) die Transversal- (ω_y) und Longitudinal-Winkelgeschwindigkeit (ω_x) gleich werden.

Mit den Größen ω_x und ω_y haben wir etwas gefunden, das man *Eigenschwingungen* (oder *Moden*) des Systems nennt. Erhöht man die Anzahl der Massestücke und Federn auf n bzw. $n + 1$, so bilden sich für dieses System wiederum $2n$ Eigenschwingungen heraus (n in x - und ebenso in y -Richtung), man spricht dann von einem *Eigenfrequenzspektrum*. Stößt man dieses System an und überläßt es daraufhin sich selbst, so läßt sich jegliches Verhalten durch die Eigenschwingungen zusammensetzen. Abb. SA-G.2 zeigt schematisch die transversalen Eigenschwingungen einer Federkette; sie erinnert schon stark an die Gestalt, wie wir sie von einer schwingenden Saite erwarten.

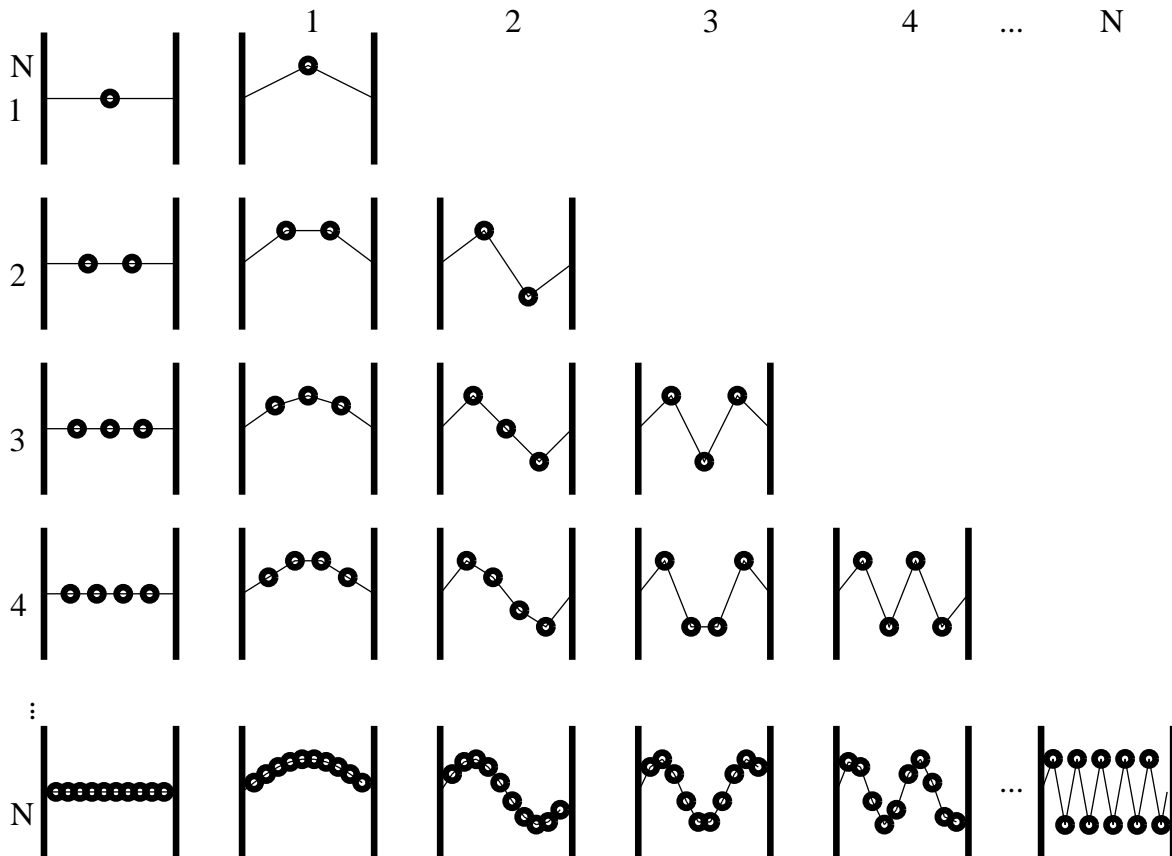


Abbildung SA-G.2: Transversale Eigenschwingung einer Federkette

2. Wellen

2.1. Mathematische Formulierung

Wieder fangen wir mit einem bekanntem Beispiel an. Ein Seil sei an einer Wand befestigt und werde mit der Hand straff gehalten. Eine kurze Auf- und Abbewegung mit dem Arm läßt einen Wellenzug entstehen, der auf dem Seil entlangläuft. Hier gilt es, zur Beschreibung eine Funktion der Auslenkung f in Abhängigkeit vom Ort x und der Zeit t zu finden. Zunächst sieht man zwei Eigenschaften der Welle:

1. Sie hat eine (wie auch immer geartete) *Gestalt*.
2. Sie hat eine *Ausbreitungsrichtung* und eine *Ausbreitungsgeschwindigkeit*.

Stellen wir uns vor, die Welle laufe auf der x -Achse entlang nach rechts. Dann können wir eine Momentaufnahme durch eine Gestaltfunktion $f(x)$ ausdrücken, zum Beispiel durch

$$f(x) = A \sin(kx). \quad (\text{SA-G.6})$$

Wie stellen wir aber dar, daß $f(x)$ nach rechts, also zu größeren x -Werten, läuft? Betrachten wir die Funktion

$$f_a(x) = f(x - a), \quad a > 0 \text{ und fest gewählt.}$$

Die Funktion $f_a(x)$ hat die gleiche Gestalt wie $f(x)$, ist aber um a nach rechts verschoben. Das kann man sich anhand einer Skizze klarmachen:

$(x - a)$ liegt um a links von x . Soll nun f_a für beispielsweise x_0 bestimmt werden, so muß der Funktionswert von f an der Stelle $(x_0 - a)$ genommen werden. Passiert dies nun für jedes x , so baut f_a die gesamte Funktion f mit einer Versetzung um a nach rechts wieder auf. Die Funktion $f_{-a}(x) = f(x + a)$ leistet das Gleiche, nur mit der Verschiebung nach links.

Läßt man jedoch a nicht fest, sondern läßt es mit der Zeit wachsen, also

$$a = ct, \quad c > 0 \text{ und fest,}$$

so sieht man, daß zu jedem Zeitpunkt

$$f_t(x) = f(x - ct)$$

die Gestalt von f entsprechend nach rechts verschoben darstellt. Je größer t (also je später) und je größer die Konstante c gewählt ist, desto weiter rechts liegt f_t . Damit wird auch verständlich, daß c eine *Geschwindigkeit* ist:

In der Zeit t_0 ist die Funktion f_t um den Weg ct_0 nach rechts gewandert, Geschwindigkeit ist Weg pro Zeit, also $ct_0/t_0 = c$. Jetzt können wir Gestalt, Laufgeschwindigkeit und –richtung mathematisch formulieren.

Nun ist aber nicht jede nach rechts oder links laufende (Gestalt–)Funktion auch eine mögliche Welle. Dazu muß sie noch der *Wellengleichung* genügen, die, wie die Schwingungsgleichung weiter oben, auch eine Differentialgleichung ist. Sie ist im Herleitungsteil dargestellt. Unser gewähltes Beispiel

$$f_w(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (\text{SA-G.7})$$

erfüllt sie ebenso wie

$$f_{\cos}(x, t) = B \cos(kx - \omega t).$$

Mit f_w haben wir jetzt die Möglichkeit, die *Wellenlänge* λ zu definieren. Wir fordern, daß

$$f_w(x + \lambda, t) = f_w(x, t),$$

daß sich also beim Weiterrücken der Welle um λ wieder „das gleiche Bild bietet“. Man spricht hier auch, in Analogie zur *Zeitperiode* τ , von der *Raumperiode* λ . Damit ergibt sich

$$A \sin(k(x + \lambda) - \omega t) = A \sin(kx + k\lambda - \omega t) = A \sin(kx - \omega t);$$

eine Bedingung, die nur mit

$$k\lambda = 2\pi n$$

erfüllt werden kann. Eine Verschiebung seines Argumentes um 2π verändert den Funktionswert einer Sinus– oder Kosinusfunktion nicht. Bleibt festzuhalten:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad n = 1 \text{ zur Definition von } \lambda. \quad (\text{SA-G.8})$$

k nennt man auch *Wellenzahl*.

Alle Lösungen der Wellengleichung lassen sich aus trigonometrischen Wellenfunktionen mit verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten und Amplitudenkonstanten additiv aufbauen. Das bedeutet, daß jeder Wellenzug, der selber nicht wie ein reiner Sinus oder Kosinus aussieht, eindeutig in ein Amplituden- und Frequenzspektrum zerlegt werden kann. Das soll hier unbewiesen bleiben, aber der weitreichenden Konsequenzen wegen erwähnt werden. Zum Schluß dieses Abschnitts sei betont, daß die gesamte Begriffsbildung wie Wellenlänge, Frequenz etc. an die trigonometrischen Funktionen gebunden ist.

2.2. Der Zusammenhang von Welle und Schwingung

Wir haben aber auch die Möglichkeit, unser Augenmerk nicht auf die laufende Welle, sondern auf einen festen Punkt des Seiles zu richten. Erreicht ihn die Welle, so wird er transversal ausgelenkt, ist sie über ihn hinweg, befindet er sich wieder in Ruhe. Wellen werden also durch Schwingungen vermittelt. Die Schwingungsdauer τ eines (Seil-) Punktes ist somit die Zeit, in der die Welle um ihre Wellenlänge λ gewandert ist:

$$c = \frac{\lambda}{\tau} = \lambda \nu. \quad (\text{SA-G.9})$$

τ ist, wie wir bei der Schwingung (Gl.SA-G.4) gesehen haben, über die Kopplung der Teilchen des Mediums (im Federmodell die Konstante k) und deren Massen bestimmt. Ist die Kopplung nun stark (großes k), wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle mit festem λ_0 größer sein als bei schwacher (kleines k). So wird auch plausibel, warum sich Schall in Festkörpern schneller als in Wasser und in diesem wiederum schneller als in Luft ausbreitet. Medien, die große Wellengeschwindigkeiten zulassen, nennt man bezüglich der betreffenden Wellenart (z. B. akustisch oder optisch) dünn; an Grenzschichten unterschiedlich dichter Medien tritt Brechung auf. Dieses Dichte-Verständnis hat bei Schallwellen nur zum Teil mit der üblichen Bedeutung von Dichte als Masse pro Volumeneinheit, dem spezifischen Gewicht, zu tun. Warum?

In unserem Versuch betrachten wir eine gespannte Saite, also ein eindimensionales, kontinuierliches Medium. Dann gehen die einzelnen Federspannungen $k(a_i - a)$ der Federkette (Abb. SA-G.2) über in eine durchgängige Saitenspannung T , und die diskreten Massestücke m_i in die Saiten-Massendichte μ (in kg/m). Wie im Herleitungsteil gezeigt wird, gilt dann:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (\text{SA-G.10})$$

2.3. Die Interferenz

Was bedeuten *das Superpositionsprinzip*, *die Interferenz* oder *das Prinzip der additiven Überlagerung von Wellen*? Lassen wir zwei Wellenzüge (zum Beispiel gleichzeitig an den entgegengesetzten Enden eines Seiles) starten. Sie laufen aufeinander zu, durchdringen sich gegenseitig und bewegen sich danach ohne Änderung ihrer Gestalt weiter. Seien $f_1(x - ct)$

und $f_2(x + ct)$ die entsprechenden wandernden Gestaltfunktionen, die Seilauslenkungen bei Anwesenheit nur eines Wellenzuges somit bekannt.

Wie ist aber die Ortsfunktion $y(x, t)$ des Seiles im Durchdringungsbereich der Wellen? Es gilt das *Prinzip der additiven Überlagerung*:

$$y(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct). \quad (\text{SA-G.11})$$

Die Auslenkung eines Seilpunktes x_0 zum Zeitpunkt t_0 ergibt sich also immer aus der *Summe* der einzelnen Wellenfunktionen. Diese Funktion $y(x, t)$ gilt allgemein für das ganze Seil: Anwesenheit nur eines Wellenzuges f_1 bei x_1 und t_1 bedeutet ja $f_2(x_1, t_1) = 0$, also $y(x_1, t_1) = f_1(x_1, t_1)$.

Im Zusammenhang mit dem Beugungsversuch sei hier noch das *Huygens'sche Prinzip* erwähnt. Wir stellen uns eine zweidimensionale Anordnung von identischen Massestücken vor, die schachbrettartig zwischen identischen Federn aufgehängt sind. Ein Massestück werde ausgelenkt. Natürlich reißt es seine Nachbarn entsprechend seiner Kopplung mit. Diese vollführen jetzt ihrerseits das Gleiche. Je dichter nun die Massestücke angeordnet sind, desto mehr wird sich das Muster der weitergegebenen Schwingungen einer Kreiswelle nähern. Die mitgerissenen Nachbarn lösen ihrerseits, jeweils später und an ihrem Ort, wieder eine Kreiswelle aus. Trotzdem sehen wir nur eine, nämlich die, welche vom anfangs ausgelenkten Massestück loslief. Ihre Erscheinung ist das Ergebnis der *Überlagerung aller Kreiswellen*, die von einem jeden Massestück ausgehen. Was wir also sehen, ist ein Interferenzbild sogenannter *Elementarwellen*. Eine jegliche Wellenausbreitung in einem Medium, die Fortpflanzung einer jeglichen Wellenfront ist immer das Interferenzbild der räumlich und zeitlich verschieden startenden elementaren Kugelwellen; lediglich unsere Einschränkung auf eine zweidimensionale Anordnung hat uns zu elementaren Kreiswellen geführt.

2.4. Die Reflexion

Im Fall der Reflexion einer Welle am Seilende durchdringen sich zwei Wellenzüge, von denen im weiteren der einlaufende $f_1(x, t)$ und $f_2(x, t)$ der auslaufende sei. Nach dem Überlagerungsprinzip muß es also heißen:

$$y(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct).$$

Gesetzt, die Gestalt der einlaufenden Welle f_1 sei bekannt, so können wir die Gestalt der auslaufenden berechnen. Dies geschieht durch die Formulierung einer geeigneten *Randbedingung*.

Mit $x = 0$ als dem Verankerungspunkt des Seiles schreiben wir:

$$y(0, t) = 0, \quad (\text{SA-G.12})$$

denn hier kann sich das Seil nicht bewegen. Es folgt:

$$y(0, t) = f_1(0 - ct) + f_2(0 + ct) = 0,$$

und somit

$$-f_1(-ct) = f_2(ct). \quad (\text{SA-G.13})$$

ct durchläuft den gesamten Definitionsbereich, so daß diese Beziehung nur erfüllt ist, wenn f_2 die Punktspiegelung von f_1 am Ursprung des Koordinatensystems ist. Damit haben wir aus der Gestalt der einlaufenden die der auslaufenden Welle bestimmt.

Vorsicht: Man kann eben nicht behaupten, daß $f_1(0, t) = f_2(0, t) = 0$, da die Bedingung $y(0, t) = 0$ durch Interferenz von Funktionen zu erreichen ist, die selber ungleich Null sein können.

Anmerkung für die Reflexion am losen Ende: Es ergibt sich, daß die Gestalt der reflektierten Welle die Spiegelung der Gestalt der einlaufenden an der y -Achse ist.

$$f_1(-ct) = f_2(+ct). \quad (\text{SA-G.14})$$

Im Federketten-Modell wird das plausibel: Eine Transversalwelle laufe auf das Kettenende, also das letzte Massestück, zu. Dieses wird ausgelenkt, ohne seinerseits Nachbarn in Laufrichtung auslenken zu müssen. Ist es auf dem Zenit seiner Auslenkung angelangt, so ist sein Nachbar (also in Gegenlaufrichtung) schon umgekehrt. Jetzt spannt sich die Feder, und der Nachbar wird wieder in die gleiche Richtung und in gleichem Maße wie vorher ausgelenkt (Energieerhaltung!). Abb. SA-G.3 zeigt beide Fälle.

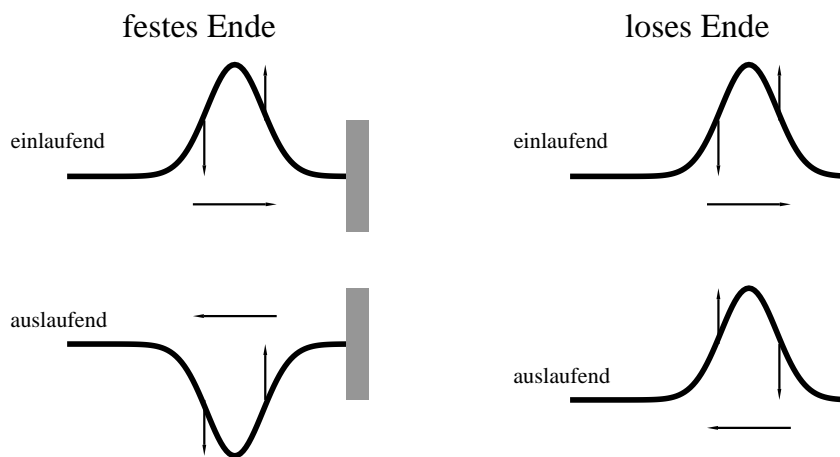


Abbildung SA-G.3: Reflexion einer Seilschwingung bei offenem und geschlossenem Ende

2.5. Die stehende Welle

Hält man nun beide Enden des Seiles (oder einer Saite der Länge L) fest, so können in ihr nur Wellen untergebracht werden, die der Bedingung

$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad (\text{SA-G.15})$$

genügen. Für eine laufende Sinuswelle

$$f_w(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

bedeutet dies, daß sie und ihre reflektierte Welle, auch ein Sinus, bei $x = 0$ und $x = L$ immer zu Null interferieren müssen (Reflexion an zwei festen Enden). Dabei entsteht ein stationäres (d. h. zeitlich unveränderliches) Bild, eine *stehende Welle* derselben Wellenlänge wie f_w . Die dabei auftretenden Schwingungsgebiete nennt man *Wellenbäuche*, die Ruhezone *Wellenknoten*. Die Randbedingung führt anschaulich zur Forderung, daß sich ihre Wellenlänge immer halbzahlig in die Saitenlänge einpassen muß (n ist eine beliebige natürliche Zahl):

$$n \frac{\lambda}{2} = L. \quad (\text{SA-G.16})$$

Und wegen

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$$

gibt es für jedes n mit

$$\omega_n = \frac{nc\pi}{L} \quad (\text{SA-G.17})$$

eine Eigenfrequenz ω_n . Diese Eigenfrequenzen können einzeln angeregt werden, so daß das Schwingungsbild einer Saite das einer stehenden Welle mit entsprechend vielen Wellenknoten und Wellenbäuchen ist. Die Anzahl der Wellenknoten j gibt die Ordnung n der angeregten Eigenfrequenz an:

$$n = j + 1. \quad (\text{SA-G.18})$$

Dabei dürfen natürlich die Randpunkte nicht als Knoten mitgezählt werden.

Mit den Eigenschwingungen der Saite verhält es sich so wie mit denen einer Federkette: Zupft man sie an, so setzt sich ihr Schwingungsverhalten ausschließlich aus diesen zusammen. Wie stark dabei welche Eigenschwingung zum Tragen kommt, wird von den Anfangswerten bestimmt, also dem Ort und der Art der Auslenkung. Der Klang von Streichinstrumenten beispielsweise hängt entscheidend davon ab, an welcher Stelle mit welchem Bogendruck (und welcher Bogengeschwindigkeit) die Saite gestrichen wird. Wie immer so gilt auch hier: Wer die Herleitung vertiefen will, sei auf 3.3. verwiesen.

3. Herleitungen

3.1. Longitudinal- und Transversalschwingungen

Zunächst betrachten wir den Fall eines zwischen zwei identischen Federn eingespannten Massestückes (siehe Abb.SA-G.1). Bei einer Länge a_0 der ungespannten Federn ergibt sich für den Körper in x -Richtung die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = k[(a - a_0) - x] - k[(a - a_0) + x] = -2kx, \quad (\text{SA-G.19})$$

da die Feder in einer Richtung um den Betrag $|a - a_0|$ gestaucht und in der anderen Richtung um den selben Betrag gestreckt wird. Im Gleichgewicht, d.h. $x = 0$, ist jede Feder mit der Kraft

$$F_x = k(a - a_0) \quad (\text{SA-G.20})$$

gespannt, die Gesamtkraft verschwindet jedoch, da die Einzelkräfte in entgegengesetzte Richtung wirken. Gleichung SA-G.19 ist die Differentialgleichung einer harmonischen Schwingung mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_x = \sqrt{\frac{2k}{m}}. \quad (\text{SA-G.21})$$

Schwingungen in Richtung der Feder heißen *longitudinale* Schwingungen.

Transversale Schwingungen, senkrecht zur Richtung der Federn in Ruhe, erhält man, indem man die Masse in y -Richtung auslenkt. Dabei werden die Federn auf die Länge $\sqrt{a^2 + y^2}$ (Satz des Pythagoras) ausgedehnt. Die resultierenden Kräfte in x -Richtung heben sich natürlich gegenseitig auf. In y -Richtung entsteht jedoch eine rücktreibende Kraft der Größe

$$F_y = -2k(\sqrt{a^2 + y^2} - a_0) \sin \Theta \quad ; \quad \sin \Theta = \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} \quad (\text{SA-G.22})$$

bzw.

$$F_y = -2ky\left(1 - \frac{a_0}{\sqrt{a^2 + y^2}}\right) = -2ky \left[1 - \frac{a_0}{a} \left(1 + \frac{y^2}{a^2}\right)^{-1/2}\right]. \quad (\text{SA-G.23})$$

Diese Bewegungsgleichung hat nicht mehr die einfache Form wie die in x -Richtung. Ob die harmonische Schwingung eine gute Näherung darstellt, hängt von dem nichtlinearen Term $(2ky a_0 / \sqrt{a^2 + y^2})$ in Gleichung SA-G.23 ab. Mit der Entwicklung des Wurzelausdrucks

$$\left(1 + \frac{y^2}{a^2}\right)^{-1/2} \sim 1 - \frac{1}{2} \frac{y^2}{a^2} + \frac{3}{8} \frac{y^4}{a^4} \dots \quad (\text{SA-G.24})$$

kann Gleichung SA-G.23 durch den Ausdruck

$$F_y \sim -2ky\left(1 - \frac{a_0}{a}\right) - \frac{ka_0}{a^3} y^3 \quad (\text{SA-G.25})$$

genähert werden. Für sehr kleine Werte von y kann der kubische Term vernachlässigt werden, und damit wird die Winkelgeschwindigkeit der transversalen Schwingung

$$\omega_y^2 = \frac{2k(1 - a_0/a)}{m} = \omega_x^2 \left(1 - \frac{a_0}{a}\right). \quad (\text{SA-G.26})$$

- $a \gg a_0$. Für eine stark gespannte Feder ist a viel größer als a_0 und damit schwingt diese Feder in x -Richtung mit der gleichen Frequenz wie in y -Richtung.
- Ist die Feder nicht sehr stark gespannt, so erhält man für kleine Amplituden eine harmonische Schwingung mit einer niedrigeren Frequenz als die der longitudinalen Schwingung. Die Frequenz wird höher bei größerer Spannung $(a - a_0)$ der Feder. Genau dies ist auch bei einer Saite der Fall. Man stimmt ein Saiteninstrument höher, indem man die Saitenspannung erhöht.
- $a = a_0$. Im Fall einer ungespannten Feder ist

$$F_y = -\frac{k}{a_0^2} y^3 \quad (\text{SA-G.27})$$

und man erhält nur für sehr kleine Auslenkungen eine harmonische Schwingung, denn diese rücktreibende Kraft ist keineswegs linear.

3.2. Eigenschwingungen

Als nächste Komplikation soll der Fall betrachtet werden, in dem 2 identische Massestücke zwischen 3 identischen Federn eingespannt sind (siehe Abb. SA-G.4). Wir untersuchen die longitudinalen Schwingungen.

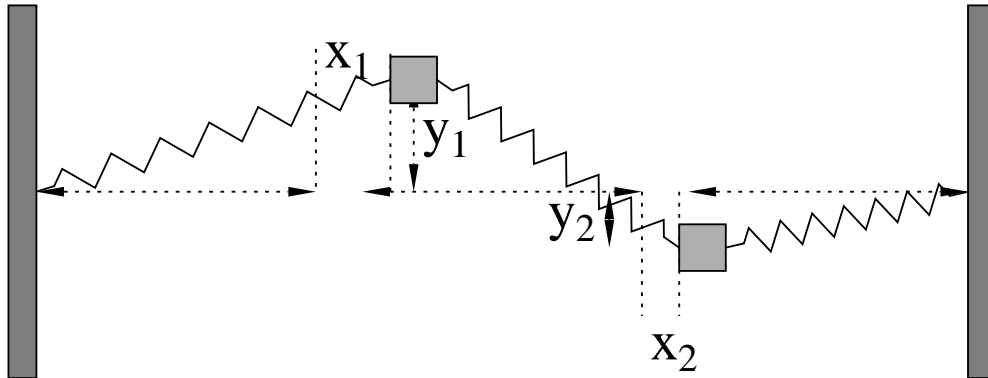


Abbildung SA-G.4: Zwei Massestücke zwischen 3 Federn

Wird die erste Masse um x_1 und die zweite um x_2 ausgelenkt, so lauten die Bewegungsgleichungen für die beiden Massen in x -Richtung

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + kx_1 + k(x_1 - x_2) &= 0 \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 + k(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{SA-G.28})$$

bzw.

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 &= 0 \\ m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{SA-G.29})$$

Die allgemeine Lösung dieser gekoppelten Differentialgleichung kann einen sehr komplizierten Verlauf haben. Das Superpositionsprinzip erlaubt es jedoch, auch komplizierte Funktionen als Überlagerung einfacher harmonischer Schwingungen darzustellen, bei welchen die zwei Massen mit *gleicher* Frequenz und *fester* Phase schwingen. Diese besonders einfachen Lösungen nennt man die Eigenschwingungen oder Moden des Systems.

Wählt man für die gesuchten Lösungen der Gleichung SA-G.29 harmonische Funktionen

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t) \quad ; \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t) \quad (\text{SA-G.30})$$

an und setzt diesen Ansatz in die Bewegungsgleichungen ein, so gilt

$$\begin{aligned} -\omega^2 A_1 + 2\frac{k}{m}A_1 - \frac{k}{m}A_2 &= 0 \\ -\omega^2 A_2 + 2\frac{k}{m}A_2 - \frac{k}{m}A_1 &= 0, \end{aligned} \quad (\text{SA-G.31})$$

bzw. mit $k/m = \omega_0^2$

$$\begin{aligned}(\omega^2 - 2\omega_0^2)A_1 + \omega_0^2 A_2 &= 0 \\ \omega_0^2 A_1 + (\omega^2 - 2\omega_0^2)A_2 &= 0.\end{aligned}\tag{SA-G.32}$$

Dieses Gleichungssystem wird für

- $A_1 = A_2$ mit $\omega = \omega_0$ erfüllt. Das bedeutet die beiden Massen bewegen sich mit der Frequenz, die man für ein Massestück an einer Feder erwartet, in Phase, so daß die mittlere Feder nie gespannt wird.
- $A_1 = -A_2$ mit $\omega = \sqrt{3}\omega_0$ gelöst. Das heißt die zwei Massen bewegen sich stets entweder aufeinander zu oder voneinander weg (Phasenverschiebung 180°). Die Frequenz wird dabei höher, da nun alle drei Federn an der Bewegung beteiligt sind.

Für eine straff gespannte Feder ($a \gg a_0$) ergeben sich ganz analog diese beiden Eigenschwingungen in transversaler Richtung, was hier aber nicht gezeigt werden soll.

Die vollständige Lösung der Bewegung der beiden Massestücke sowohl in x - als auch und y - Richtung setzt, wie bei der harmonischen Schwingung, die Kenntnis der Anfangsbedingungen für die Lage und die Geschwindigkeiten der beiden Massen voraus. Auch für drei Massen lassen sich die entsprechenden Eigenfrequenzen noch einigermaßen einfach angeben. Koppelt man hingegen n Massestücke mit Federn (ohne Beweis), so wird man n longitudinale und n transversale Eigenfrequenzen finden, aus denen sich jede nur denkbare Schwingungsform dieser Kette aufbauen läßt. In Abbildung SA-G.2 sind die transversalen Eigenschwingungen von Ketten mit wachsender Zahl von Massestücken gezeigt. Deutlich ist zu erkennen, daß die niedrigen Moden der Ketten mit höherem N schon sehr dem Bild ähneln, das man für die transversalen Schwingungen einer Saite erwartet.

3.3. Wellengleichung einer schwingenden Saite

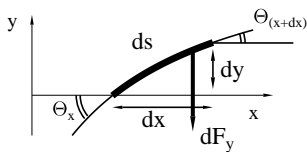


Abbildung SA-G.5: Bezeichnungen zur Ableitung der Wellengleichung

Um zu einer Beschreibung der Saitenschwingung zu gelangen, benötigt man den Übergang von diskreten Massestücken m_i zu einer kontinuierlichen Massenverteilung und von den einzelnen Spannungen $k(a_i - a_0)$ zu einer Federspannung T . Die kontinuierliche Massenverteilung wird durch die Saitendichte μ beschrieben, die in Einheiten $[\text{kg/m}]$ gemessen wird. Betrachtet man ein Element ds einer Feder, das um dy aus der Ruhelage ausgelenkt wurde, so gilt mit den Bezeichnungen in Abb.SA-G.5 für die *transversal* rücktreibende Kraft

$$\begin{aligned}dF_y &= T \sin \Theta_{x+dx} - T \sin \Theta_x \\ &= T \sin \Theta_x + \frac{\partial}{\partial x}(T \sin \Theta_x)dx - T \sin \Theta_x \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(T \sin \Theta_x)dx,\end{aligned}\tag{SA-G.33}$$

wobei wegen der infinitesimalen Änderungen in x - und y -Richtung die Taylorentwicklung der Komponente der Spannung in y -Richtung nach dem ersten Glied abgebrochen werden kann. Für kleine Winkel Θ gilt

$$\sin \Theta \sim \tan \Theta \sim \frac{\partial y}{\partial x} ,$$

da der Winkel Θ die Auslenkung aus der Ruhelage ($y = 0$) beschreibt. Damit läßt sich die Komponente der Kraft in y -Richtung (Gl. SA-G.33) durch

$$dF_y = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial y}{\partial x} \right) dx = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx , \quad (\text{SA-G.34})$$

da die Spannung T nicht vom Ort abhängt. Nach dem Newton'schen Gesetz muß diese Kraft einer Beschleunigung eines Massenelements in y -Richtung entsprechen. Es ist

$$m = \mu ds \sim \mu dx \quad \text{und} \quad a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} .$$

Damit erhält man eine Beziehung, die die zweite Ableitung der *transversalen* Auslenkung in y -Richtung in Abhängigkeit vom Ort x auf der Saite mit der zweiten Ableitung derselben Größe in Abhängigkeit von der Zeit, das heißt aber der Beschleunigung in y -Richtung, verknüpft. Die *Wellengleichung* für die Saitenschwingung lautet also

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} . \quad (\text{SA-G.35})$$

Nicht durch Zufall schreiben wir c^2 für das Verhältnis aus Spannung und Dichte, denn c ist in der Tat die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle auf der Saite, so wie in der Optik die Lichtgeschwindigkeit c die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle beschreibt.

Die Lösungen der Wellengleichung (Gl. SA-G.35) lassen sich durch Funktionen

$$y(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

darstellen, wie man durch Einsetzen sieht. Allein schon in dieser Formel steht das *Überlagerungsprinzip* der Wellen: Lösungen der Wellengleichung addieren sich wieder zu einer Lösung.

Eine harmonische Funktion der Art

$$f(x, t) = A \sin \frac{\omega}{c} (x - ct) = A \sin(kx - \omega t)$$

mit $k = \omega/c$, der Wellenzahl (k hat die Dimension Länge^{-1}), erfüllt die Wellengleichung (SA-

G.35), denn es ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &= -\omega A \cos(kx - \omega t) \\ \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} &= -\omega^2 A \sin(kx - \omega t) \\ \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} &= kA \cos(kx - \omega t) \\ \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} &= -k^2 A \sin(kx - \omega t)\end{aligned}\tag{SA-G.36}$$

und damit

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t) = -k^2 c^2 A \sin(kx - \omega t) = c^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} .$$

Bei einer schwingenden Saite der Länge L ist nun die Randbedingung, daß die Auslenkung an den Enden verschwindet, und damit nur eine *stehende Welle* eine über einen längeren Zeitraum stabile Lösung der Wellengleichung darstellt. Eine mögliche Lösung der Wellengleichung erhält man mit dem Ansatz

$$\begin{aligned}y(x, t) &= A \sin(kx - \omega t) + B \cos(kx - \omega t) \\ &+ C \sin(kx + \omega t) + D \cos(kx + \omega t)\end{aligned}\tag{SA-G.37}$$

Aus den Randbedingungen (Gl. SA-G.15) ergeben sich

$$A = C \quad \text{und} \quad B = -D ,$$

denn dann heben sich für alle Zeiten jeweils die sin und cos Ausdrücke gegenseitig auf. Unter Verwendung der Additionstheoreme für die Winkelfunktionen

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

läßt sich der Lösungsansatz schreiben als

$$\begin{aligned}y(x, t) &= A[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)] + B[\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t)] \\ &= 2A \sin kx \cos \omega t + 2B \sin kx \sin \omega t \\ &= 2[A \cos \omega t + B \sin \omega t] \sin kx .\end{aligned}\tag{SA-G.38}$$

Zum anderen bedeutet die Randbedingung $y(L, t)$ nun, daß

$$\sin kL = 0 \quad \Rightarrow \quad kL = n\pi \quad \text{bzw.} \quad \omega_n = \frac{c}{L} n\pi\tag{SA-G.39}$$

gelten muß. Es gibt also nicht nur *eine* Lösung, sondern unendlich viele, die jedoch alle die Bedingung erfüllen müssen, daß die *Eigenfrequenzen* ω_n ein Vielfaches der Grundfrequenz

$$\omega_1 = \pi \frac{c}{L}\tag{SA-G.40}$$

sein müssen.

Insgesamt wird also eine Funktion

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \sin \frac{\omega_n}{c} x \quad (\text{SA-G.41})$$

eine stehende *transversale* Welle auf einer Saite beschreiben. Die Amplitudenkoeffizienten A_n und B_n können bei der gleichen Saite verschiedentlich vorkommen. Sie werden durch die Anregung bestimmt, das heißt *wie* die Saite gezupft wurde (an wie vielen Orten und mit welcher Auslenkung).

3.4. Kurzer Ausflug in die Musik

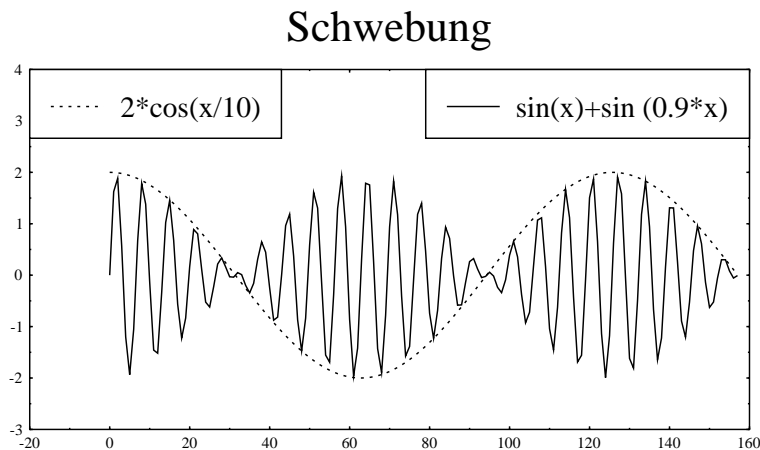


Abbildung SA-G.6: Schwebung zweier harmonischer Schwingungen

Wie oben erwähnt, läßt sich jede Saitenschwingung durch eine Überlagerung der verschiedenen Eigenschwingungen, einer sogenannten *Fourierreihen-Entwicklung*, darstellen. Dabei tragen verschiedene Obertöne mit unterschiedlichen Amplituden bei und bilden so den charakteristischen Ton eines Instruments, der auch durch unterschiedliche Anregung variiert werden kann.

Die Schwebung ist ein weiteres wichtiges Phänomen für den Sinneseindruck von Tönen. Überlagern sich zwei harmonische Schwingungen unterschiedlicher Frequenz, so ist die Einhüllende der Extrema wieder eine harmonische Schwingung, jedoch mit einer niedrigeren Frequenz. In Abb. SA-G.6 ist das Beispiel zweier Schwingungen gezeigt, die einen Frequenzunterschied von 10% aufweisen. Die Einhüllende der Maxima ist wieder eine harmonische Schwingung, jedoch ist die Frequenz um einen Faktor 10 niedriger als die Frequenz der Einzelschwingungen. Dieser Umstand ist für unser Hörempfinden von ganz entscheidender Bedeutung.

Die Stimmung der Tonleiter hängt nun eng mit den Obertönen zusammen. Die Frequenzen *harmonischer* Obertöne sind ganzzahlige Vielfache des Grundtons, d.h. es treten keine

Ton	C2	F3	C3	C4	C5	G5	C6	E6	G6	B6
Verhältnis	1/4	1/3	1/2	1	2	3	4	5	6	7
ν [Hz]	65	87	130	260	520	780	1040	1300	1560	1820
Ton	C7	D7	E7	Fis7	G7	Gis7	B7	H7	C8	
Verhältnis	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
ν [Hz]	2080	2340	2600	2860	3120	3380	3640	3900	4160	

Tabelle SA-G.1: Skala der 18 nächsten sub- und harmonischen Töne für den Grundton C4 ($\nu = 260$ Hz)

Schwebungen auf. Der Grundton kann jedoch ebenfalls Oberton eines tieferen Tons sein. Man bezeichnet als *subharmonische* Töne solche, deren Frequenz ein ganzzahliger Teil des betrachteten Grundtons ist. Zum Beispiel ist die mittlere Taste an einem Klavier das C4 (das ist das C der 4. Oktave) mit etwa $\nu = 260$ Hz. Damit erhält man als Skala der 18 nächsten sub- und harmonischen Töne die in Tab. SA-G.1 zusammengestellte Liste.

Die „reine“ Dur-Tonleiter der Oktave von C4 bis C5 (das sind die weißen Tasten zwischen C4 und C5) umfaßt nun subharmonische und harmonische der in der Tabelle SA-G.1 aufgeführten Töne, so daß das Intervall in der in Tabelle SA-G.2 gezeigten Weise aufgefüllt wird; wobei die Frequenzen für das Beispiel der Oktave C4 bis C5 gelten. Das A, das in der obigen Liste der Obertöne *nicht* auftaucht, wird dabei als $5/4F$ (große Terz überm F) eingeführt. Die Frequenzverhältnisse einiger Tonschritte in dieser Stimmung sind ebenfalls in Tabelle SA-G.2 für die „reine“ Stimmung angegeben.

1. Kleine Sekunde $F/E=C/H=16/15 = 1.067$
2. Große Sekunde $D/C=G/F=A/H=9/8=1.125$, $E/D=A/G=10/9=1.111$
3. Kleine Terz $G/E=C/A=6/5=1.2$, $F/D=32/27=1.185$
4. Große Terz $E/C=A/F=H/G=5/4=1.25$
5. Quinte $G/C=H/E=H/F=3/2$, $A/D=40/27=1.481$.

An dieser Liste erkennt man sofort das Problem, das eine „reine“ Stimmung für ein Tasteninstrument mit sich bringt. Es gibt offensichtlich unterschiedliche Frequenzverhältnisse für dieselbe Anzahl von Tonschritten, je nachdem, an welcher Stelle der Tonleiter sich das Intervall befindet. Angenommen das Klavier wäre entsprechend obigem Beispiel rein gestimmt, dann hätte man schon ein Problem, wenn man eine Tonleiter beginnend vom D spielen wollte. Als folgenden Ton benötigt man die erste große Sekunde, d.h. die Frequenz $\nu_E = \nu_D \cdot 1.125 = 329.1$ Hz, das sind immerhin schon 4 Hz mehr als das „reine“ E, das ausgehend vom C zu 325 Hz gestimmt wurde. Diese Schwierigkeit wird bei Tasteninstrumenten dadurch umgangen, daß das Frequenzverhältnis zwischen zwei Halbtönen konstant zu $2^{1/12} = 1.0594631$ gewählt wird und so eine Oktave in 12 Halbtöne aufgeteilt wird. Diese Stimmung wird als *wohltemperiert* bezeichnet und hat sich in Europa mit dem Ende des 17. Jahrhunderts durchgesetzt.

Stimmung	C	D	E	F	G	A	H	C
rein	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
ν [Hz]	260	292.5	325	346.7	390	433	487.5	520
wohltemp.	1	$2^{2/12}$	$2^{4/12}$	$2^{5/12}$	$2^{7/12}$	$2^{9/12}$	$2^{11/12}$	2
ν [Hz]	260	291.8	327.6	347.1	389.6	437.3	490.8	520

Tabelle SA-G.2: Vergleich einer Dur-Tonleiter in reiner und temperierter Stimmung für den Grundton C4 ($\nu = 260$ Hz)